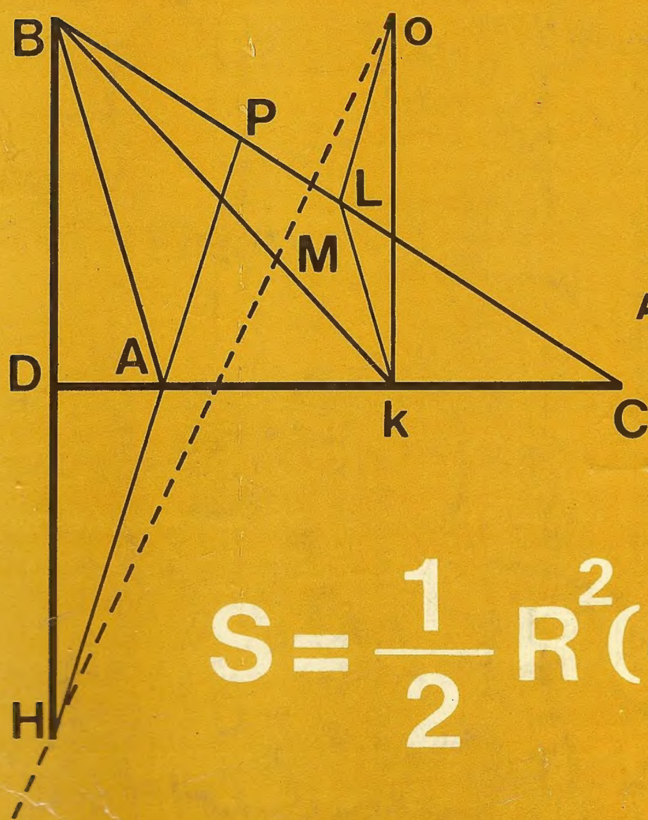
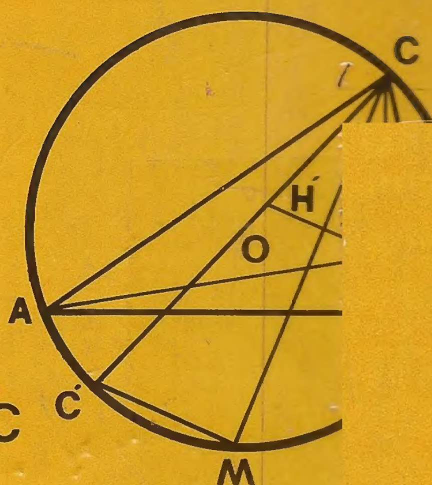
گروهی از ریاضیدانان شوروی

برگزیده مسائل هندسه

ترجمهٔ عادل ارشقی



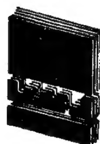


$$S=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$$

برگزیدهٔ مسائل هندسه

گروهی از ریاضیدانان شوروی

ترجمهٔ عادل ارشقی



مقدمه

کتاب حاضر که برگردانی از آثار ریاضیدانان شوروی است حاوی اصول و بنیادهای هندسه فضایی و مسطحه است. مؤلفین در جای جای کتاب صرفنظر از ارائه مسائل نوینی از هندسه، از طریق حل مسائل ــ فراتر از روش های سنتی بیان مفاهیم هندسی ــ دیدگاه های روش شناسانه ای برای تجزیه‌وتحلیل و ره‌یابی مسائل هندسی ارائه داده اند. مترجم امیدوار است که کتاب حاضر با همهٔ کاستی ها و کمبودهایش از نظر ترجمه بتواند برای دانش آموزان و ریاضی دوستان راهنما و آموزنده باشد و خوانندگان علاقمند را با زمینه های نوینی از فهم و تبیین موضوعات هندسی آشنا سازد.

عادل ارشقی

فهرست مطالب

فصل اول: هندسه مسطحه

(۱۱۹ـ ۹)

فصل دوم: هندسه فضایی
(۱۱۹ ـ ۱۷۷)

فصل اول

هندسه مسطحه

بخش ۱. روشهای حل مسائل هندسی

درحل مسائل هندسی معمولاً سه روش بکار می‌رود: روش هندسی (گزاره مطلوب براساس تعدادی قضیهٔ مشهور و با کمک براهین منطقی استنتاج می‌شود)، روش جبری (اثبات گزاره یا یافتن کمیت ها با محاسبه مستقیم براساس روابط موجود بین کمیت های هندسی ازطریق تشکیل معادله یا دستگاه معادلات انجام می‌گیرد)، روش هندسی ــ جبری (دراین روش برخی ازمراحل حل مسئله ازطریق روش جبری و بعضی دیگر ازمراحل آن ازطریق روش هندسی انجام می‌گیرد).

صرفنظر از روش انتخابی برای حل مسائل هندسه، موفقیت و کارآئی آنها به شناخت قضایا و کاربرد مناسب قضایا بستگی دارد. قبل از ارائه همهٔ قضایای هندسه مسطحه (خوانندگان با اکثرآنها ازقبیل: شرایط تساوی مثلثهای اختیاری، شرایط تساوی مثلث های قائم الزاویه، ویژگی های اساسی مثلث متساوی الساقین، متوازی الاضلاع، لوزی، مستطیل، قضیه تالس، قضیه فیثاغورس، روابط بین اضلاع و زوایای مثلث قائم الزاویه، شرایط تشابه مثلث ها، قضیه مربوط به تساوی کمانهای واقع بین دو وتر متوازی وغیره آشنایی دارند) ضروری بنظر می‌رسد که صورت بندی قضایای معینی را در اینجا مورد ملاحظه قرار دهیم که درحل مسائل هندسی غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این پس به این قضایا به کرّات مراجعه خواهیم کرد.

۱ • مثلث ها وچهارضلعی ها

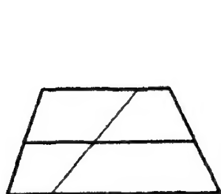
۱ • قضیه مربوط به تساوی زوایایی که اضلاع آنها دوبدو برهم عمود هستند: اگر $\angle ABC$ و $\angle DEF$ هردوحاده ویا هردومنفرجه بوده و $AB \perp DE,\ BC \perp EF$ باشد (شکل ۱) آنگاه $\angle ABC = \angle DEF$ خواهد بود.

۲ • ویژگی های میانه ذوزنقه:

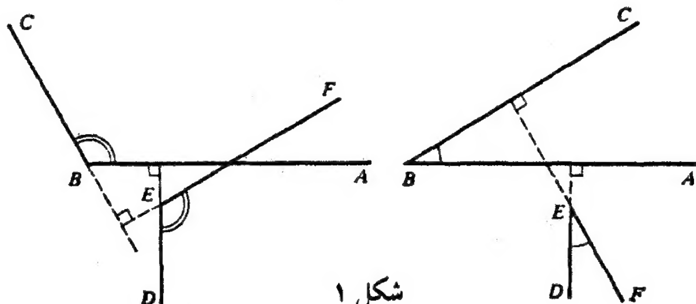
(a) میانه ذوزنقه با قاعده های آن موازی است؛

(b) طول میانه ذوزنقه با نصف مجموع قاعده های آن برابر است.

(c) میانه (وفقط میانه) ذوزنقه هر خطی را که بین دو قاعده ذوزنقه قرار دارد نصف می‌کند(شکل ۲).



شکل ۲



شکل ۱

قضایای فوق در مورد خط واصل اوساط دو ضلع مثلث نیز صادق است. در این حالت مثلث به عنوان یک ذوزنقه تبهگن در نظر گرفته می‌شود. در ذوزنقه تبهگن طول یکی از قاعده ها برابر صفر است.

۳ • قضایای مربوط به نقاط تلاقی میانه ها، نیمسازها و ارتفاعات مثلث:

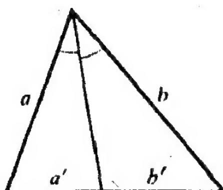
(a) سه میانه یک مثلث متقارب هستند؛ یعنی آنها در نقطه ای همدیگر را قطع می‌کنند. این نقطه گرانیگاه (یا مرکز ثقل) مثلث نامیده می‌شود. فاصله این نقطه روی هر میانه از رأس مربوط به آن میانه برابر دوسوم همان میانه است.

(b) هرسه نیمساز زوایای مثلث از یک نقطه عبور می‌کنند و فواصل این نقطه از اضلاع مثلث باهم مساوی هستند.

(c) سه ارتفاع هر مثلثی دریک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. این نقطه را «مرکز ارتفاعی» مثلث می‌نامند.

٤ • خاصیت میانه مثلث قائم الزاویه: در مثلث قائم الزاویه طول میانه وارد بر وتر برابر نصف طول وتر است. عکس این اصل نیز درست است: اگر در مثلثی طول میانه ای برابر نصف ضلع میانه مرسوم برآن باشد درآنصورت مثلث مزبور قائم الزاویه خواهد بود.

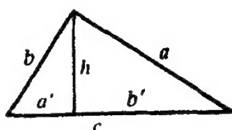
۵ • خاصیت نیمساز زاویه داخلی مثلث: دریک مثلث، نیمساز زاویه داخلی ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبتی تقسیم می‌کند که با نسبت اضلاع زاویه مزبور متناسب است: $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ (شکل ۳).



شکل ۳

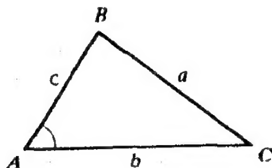
۶ • روابط متریک در مثلث قائم الزاویه: اگر a و b، ساق ها و c وتر، h ارتفاع، و a' و b' تصاویر ساق ها روی وتر باشند (شکل ٤)، آنگاه چنین خواهیم داشت:

(a) $h^2 = a'b'$؛ (b) $a^2 = ca'$؛ (c) $b^2 = cb'$؛ (d) $a^2 + b^2 = c^2$؛ (e) $h = \frac{ab}{c}$.



شکل ٤

۷ • قانون کسینوس ها: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (شکل ۵).



شکل ۵

۸ • قانون سینوس ها: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. در این رابطه R عبارت از شعاع دایره محیط بر مثلث است.

۹ • تعیین نوع مثلث بوسیله اضلاع آن: اگر a و b و c را طول اضلاع مثلث و c را بزرگترین ضلع در نظر بگیریم، آنگاه چنین خواهیم داشت:

(a) اگر $c^2 < a^2 + b^2$ باشد آنگاه مثلث مفروض حادة الزاویه خواهد بود؛

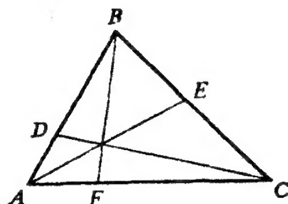
(b) اگر $c^2 = a^2 + b^2$ باشد آنگاه مثلث مفروض قائم الزاویه خواهد بود؛

(c) اگر $c^2 > a^2 + b^2$ باشد در آنصورت مثلث مفروض منفرجة الزاویه خواهد بود.

۱۰ • قضیه سِوا: اگر در مثلثی سه خط مارّ از رئوس A، B و C متقارب بوده و اضلاع مقابل را در نقاط D، E و F قطع کنند در آنصورت روی هر ضلع مثلث دو قطعه بوجود می‌آورند. حاصلضرب سه تا از این پاره‌خط ها بصورت یک در میان برابر حاصلضرب سه پاره‌خط دیگر است.

در مثلث ABC، نقاط D، E و F را بترتیب روی اضلاع AB، BC و AC اختیار می‌کنیم. شرط لازم و کافی برای تقارب خطوط AE، BF و CD (شکل ٦) برقراری تساوی زیر است:

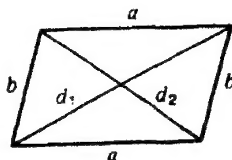
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1.$$



شکل ٦

۱۱ • روابط متریک در متوازی الاضلاع: مجموع مربعات اقطار هر متوازی الاضلاع معادل مجموع مربعات اضلاع آن است. (شکل ۷).

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



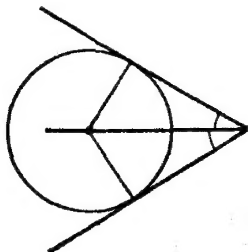
شکل ۷

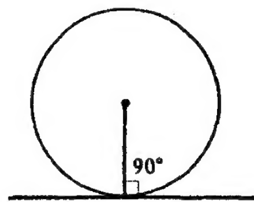
۲ • دایره‌ها

۱۲ • ویژگی های خطوط مماس بر دایره:

(a) شعاع مرسوم بر نقطه تماس خطی با دایره بر خط مزبور عمود است (شکل ۸)؛

(b) دو خط مماس مرسوم بر دایره‌ای از یک نقطه خارج دایره باهم برابر هستند و با خط مرسوم از نقطه مزبور به مرکز دایره دو زاویه متساوی بوجود می‌آورند (شکل ۹).


شکل ۹



شکل ۸

۱۳ • سنجش زاویه:

(a) اندازه زاویه مرکزی در دایره از نظر درجه با کمان مقابل به زاویه برابر است؛

(b) اندازه زاویه محاطی از نظر درجه با نصف کمان روبرو به آن زاویه برابر است؛

(c) زاویه تشکیل شده بوسیله خط مماس و وتر مرسوم از نقطه تماس از نظر درجه با نصف کمان واقع در داخل زاویه برابر است.

۱۴ • قضایای مربوط به دایره ها و مثلث ها

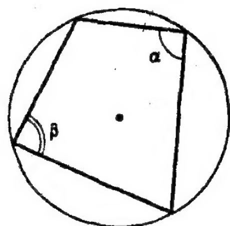
(a) بر هر مثلثی می‌توان دایره ای را محیط کرد؛ مرکز دایره محیطی بر نقطه تقارب عمودمنصف های اضلاع مثلث منطبق خواهد بود؛

(b) در هر مثلثی می‌توان دایره ای را محاط کرد. مرکز دایره محاطی بر نقطه تقارب نیمسازهای مثلث منطبق خواهد بود.

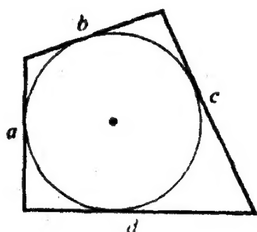
۱۵ • قضایای مربوط به دایره ها و چهارضلعی ها

(a) برای اینکه دایره ای را بتوانیم بر یک چهارضلعی محیط کنیم لازم و کافی است که مجموع زوایای متقابل چهارضلعی $180°$ باشد ($\alpha + \beta = 180°$) (شکل ۱۰).

(b) شرط لازم و کافی برای محاط شدن دایره ای در داخل یک چهارضلعی این است که مجموع هردو ضلع متقابل چهارضلعی با مجموع دوضلع دیگر آن برابر باشد ($a + c = b + d$) (شکل ۱۱).



شکل ۱۰



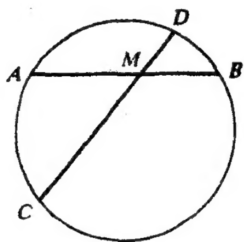
شکل ۱۱

۱۶ • روابط متریک در دایره:

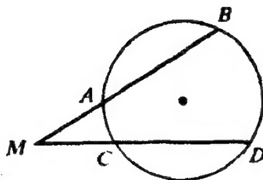
(a) اگر در دایره ای دو وتر AB و CD در نقطه M همدیگر را قطع کنند آنگاه $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ خواهد بود (شکل ۱۲)؛

(b) اگر دو قاطع MAB و MCD از نقطه خارجی M بر دایره ای رسم شوند آنگاه:
$AM \cdot BM = CM \cdot DM$ را خواهیم داشت (شکل ۱۳)؛

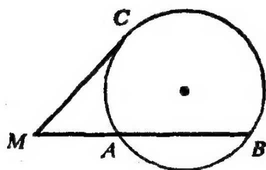
(c) اگر از نقطه خارجی M، قاطع MAB و مماس MC را بر دایره ای رسم کنیم در آنصورت $AM \cdot BM = CM^2$ را خواهیم داشت (شکل ۱۴).



شکل ۱۲



شکل ۱۳



شکل ۱۴

۳ ● مساحت اشکال مسطحه

۱۷ ● نسبت مساحت اشکال متشابه با مجذور نسبت تشابه آنها برابر است.

۱۸ ● اگر دو مثلث دارای قاعده های مساوی باشند در آنصورت نسبت مساحت های آنها برابر نسبت ارتفاعات خواهد بود؛ اگر دو ارتفاع از دو مثلث باهم برابر باشند در آنصورت نسبت مساحت های دو مثلث برابر نسبت قاعده های آنها خواهد بود.

۱۹ ● فرمولهای محاسبه مساحت مثلث:

(a) $S=\frac{ah}{2}$; (b) $S=\frac{ab\sin C}{2}$; (c) $S=\frac{abc}{4R}$; (d) $S=pr$

(e) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (فرمول هرو)

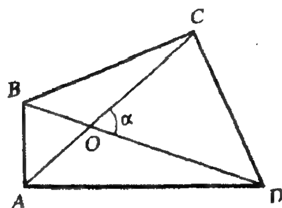
در این فرمول ها $p=\frac{a+b+c}{2}$ بوده و R عبارت از شعاع دایرهٔ محیطی و r عبارت از شعاع دایره محاطی مثلث است.

۲۰ ● فرمول های محاسبه مساحت چهارضلعی محدب (کوژ):

(a) $S=S_{ABC}+S_{ACD}=S_{ABD}+S_{BCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}$

(b) $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$;

(c) $S=pr$ (درصورتیکه دایره ای را بتوان در چهارضلعی محاط کرد و r طول شعاع این دایره باشد)



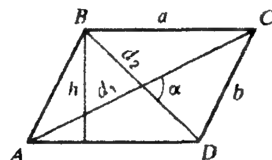
شکل ۱۵

۲۱ ● فرمول محاسبه مساحت متوازی الاضلاع (شکل ۱٦):

(a) $S=ah$;

(b) $S=ab\sin C$;

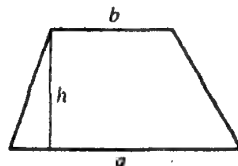
(c) $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.



شکل ۱٦

۲۲ ● فرمول محاسبه مساحت ذوزنقه (شکل ۱۷):

$S=\frac{a+b}{2}h$.

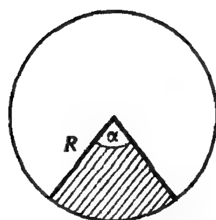


شکل ۱۷

۲۳ ● فرمول محاسبه مساحت قطاع دایره (شکل ۱۸):

$S=\frac{1}{2}R^2\alpha$

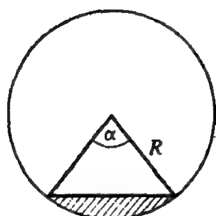
(α اندازهٔ زاویه مرکزی قطاع برحسب رادیان است).



شکل ۱۸

۲۴ ● فرمول مساحت قطعه ای از دایره (شکل ۱۹):

$$S=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha).$$



شکل ۱۹

در حل مسائل هندسی، غالباً به اثبات برابری دو پاره خط (یا دو زاویه) مبادرت می‌کنیم. در زیر سه روش اساسی برای اثبات برابری (طولی) دو پاره خط فهرست شده است:

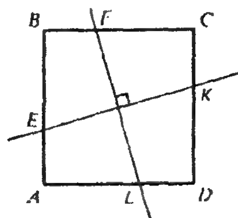
(1) پاره خط ها را به عنوان اضلاع دو مثلث مورد ملاحظه قرار داده و به اثبات تساوی این دو مثلث می‌پردازیم؛

(2) پاره خط ها را به عنوان اضلاع مثلثی در نظر گرفته و به اثبات متساوی الساقین بودن این مثلث می‌پردازیم؛

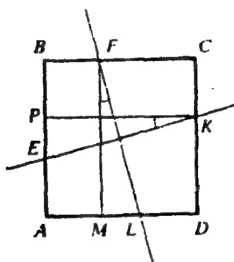
(3) پاره خط a را با پاره خط a' و پاره خط b را با پاره خط مساوی b' تعویض کرده و ثابت می‌کنیم که پاره خط های a' و b' برابر هستند.

در حل مسائل هندسی از رسم خطوط کمکی استفاده می‌شود، از قبیل: خط عمود یا موازی با خطی از شکل مسئله، دوبرابر کردن طول میانه مثلث برای تبدیل آن به متوازی الاضلاع؛ رسم دایره کمکی؛ رسم شعاع هایی بر نقطه تماس خط با دایره یا نقطه تماس دو دایره.

مثال ۱ ● دو خط متقاطع، اضلاع AB، BC، CD و AD از مربع $ABCD$ را بترتیب در نقاط E، F، K و L قطع می‌کنند. $EK=FL$ را ثابت کنید (شکل ۲۰).



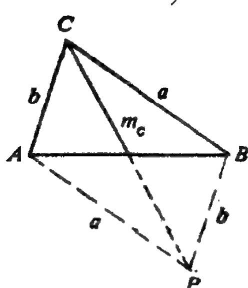
شکل ۲۰



شکل ۲۱

اثبات • با استفاده از روش اول مطروحه درفوق، FM را موازی CD و KP را موازی AD رسم می‌کنیم. آنگاه پاره‌خط های EK و FL مورد ملاحظه اضلاع دو مثلث قائم الزاویه EKP و FLM بوده (شکل ۲۱) و از اینرو اثبات برابری این دومثلث کفایت می کند. چنین داریم: $FM = PK$ (ارتفاع های مربع مفروض)؛ $\angle EKP = \angle LFM$ (دوزاویه ای که اضلاع آنها دو بدو برهم عمود هستند وطبق قضیه ۱ باهم مساوی خواهند بود). از اینرو مثلث های EKP و FLM برابر (به حالت تساوی یک ضلع زاویه قائمه ویک زاویه حاده) خواهندبود. تساوی این دو مثلث قائم الزاویه، موجب برابری وترهای آنها شده ودرنتیجه EK و FL باهم برابر خواهند شد.

مثال ۲ • اگر طول اضلاع مثلثی برابر a، b و c باشد درآنصورت m_c، میانه مرسوم بر ضلع c را محاسبه کنید.



شکل ۲۲

حل • میانهٔ مزبور را به اندازه خود امتداد می‌دهیم. انتهای این خط با سه رأس مثلث، متوازی الاضلاع $ACBP$ را بوجود می‌آورد (شکل ۲۲). با استفاده از قضیه ۱۱ درمورد این متوازی الاضلاع به $CP^2 + AB^2 = 2AC^2 + 2BC^2$ یعنی $(2m_c)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$ دست می یابیم که از آن نیز $m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$ حصول می یابد.

مثال ۳ • ثابت کنید که مرکز ارتفاعی یک مثلث حادة الزاویه بر مرکز دایره ای منطبق است که در مثلث حاصله از اتصال پای عمودهای مثلث مفروض محاط است.

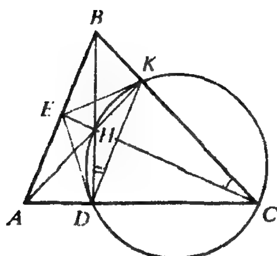
اثبات • از آنجا که مرکز دایره محاطی دریک مثلث بر نقطه تقارب نیمسازهای مثلث منطبق است (قضیه ۱٤b) از اینرو مسئله مفروض به اثبات این حکم تحویل می‌یابد که DH، EH و KH نیمسازهای زوایای مثلث DEK هستند (شکل ۲۳).

برای این منظور کافی است که $\angle EDH = \angle HDK$ ثابت شود.

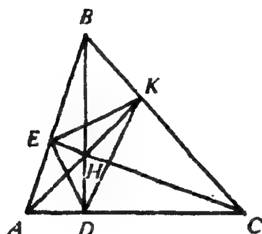
چهارضلعی $DHKC$ را مورد ملاحظه قرارمی‌دهیم. چنین داریم:

$\angle HDC = 90°$ و $\angle HKC = 90°$. ازاینرو $\angle HDC + \angle HKC = 180°$ بوده و در نتیجه دایره ای را می‌توان بر چهارضلعی $DHKC$ محیط کرد (قضیه ۱۵a). با رسم این دایره (شکل ۲٤). متوجه می‌شویم که زاویه های HDK و HCK باهم برابر هستند. دلیل امر این است که هردو زاویه محاطی بوده وبه کمان HK مقابل هستند. بطریق مشابه با محیط کردن دایره ای بر چهارضلعی $AEHD$ به $\angle EDH = \angle EAH$ دست می‌یابیم. بدین ترتیب داریم: $\angle EDH = \angle EAH$ و $\angle HDK = \angle HCK$. اضلاع زاویه‌های EAH و HCK دوبدوبرهم عمود بوده و از اینرو برابر هم محسوب می‌شوند (طبق قضیه ۱) که درنتیجه $\angle EDH = \angle HDK$ بدست می‌آید که اثبات آن

مطلوب بود.



شکل ۲۴



شکل ۲۳

تشکیل معادلات درمسائل هندسی با استفاده ازقضیه فیثاغورس، روابط متریک درمثلث قائم الزاویه (قضیه ٦)، روابط بین اضلاع وزوایای مثلث قائم الزاویه، تناسب اضلاع، ارتفاعات و محیط مثلث های متشابه، ویژگی نیمساز زوایای مثلث (قضیه ۵)، روابط متریک درمتوازی الاضلاع، قضیه کسینوسها (قضیه ۷) وفرمول های متنوع محاسبه مساحت ها، انجام می‌گیرد.

برای تشکیل معادلات لازم برای حل مسائل هندسی «روش عنصر مرجع» یک روش بنیادی است.

این روش به شرح زیر است:

یک عنصر هندسی بدوطریق بیان شده وسپس مقادیر حاصله برای آن در این دو روش باهم مساوی قرار داده می‌شوند.

مثال ٤ ● اضلاع مثلثی با a، b و c برابر است. h_c، ارتفاع مرسوم برضلع c را پیدا کنید.

حل ● روش اول. ارتفاع h_c برای دو مثلث قائم الزاویه ACH و CHB ضلع مشترک محسوب می‌شود (شکل ۲۵). با استفاده ازقضیه فیثاغورس، معادل های CH^2 را ازمثلث های ACH و CHB (CH عنصر مرجع محسوب می‌شود) می‌نویسیم. اگر $AH=x$ فرض شود آنگاه $BH=c-x$ خواهد بود. توجه داشته باشید که اگر ACB منفرجة الزاویه باشد درآنصورت $BH=c+x$ خواهد بود (شکل ٢٦). در اینجا فقط حالت ارائه شده درشکل ۲۵ را مورد ملاحظه قرارمی‌دهیم. ازمثلث ACH به $CH^2=b^2-x^2$ و ازمثلث BCH به $CH^2=a^2-(c-x)^2$ وصول می‌یابیم.

ازمعادله $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$ نیزچنین استنتاج می‌شود: $x=\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$.

فرمول زیر از مثلث ACH بدست می‌آید:

$$CH=\sqrt{b^2-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(b-\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)\left(b+\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)}$$

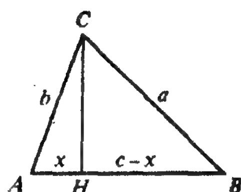
$$=\frac{1}{2c}\sqrt{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)}$$

$$=\frac{1}{2c}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)}.$$

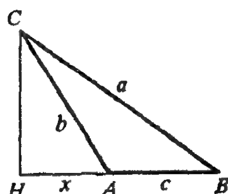
بدین ترتیب داریم:
$$h_c=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c}$$

روش دوم. از روش مساحت ها استفاده می‌کنیم. از یک طرف مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و از طرف دیگر معادل $\frac{1}{2}ch_c$ است. با مساوی قرار دادن این دو عبارت چنین نتیجه می‌شود: $h_c=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$. با در نظر گرفتن p برحسب اضلاع مثلث یعنی $p=\frac{a+b+c}{2}$ و جایگذاری در عبارت فوق چنین نتیجه می‌شود:

$$h_c=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c}$$



شکل ۲۵



شکل ۲۶

مثال ۵ ● مثلثی با اضلاع a، b و c مفروض است. l_c، نیمساز وارد بر ضلع c را پیدا کنید.

حل ● روش اول (روش جبری). CD را در مثلث ABC، نیمساز در نظر می‌گیریم (شکل ۲۷). طرح کلی مسئله به شرح زیر است:

طول پاره‌خط های AD و BD را پیدا کرده و سپس قانون کسینوس ها را در مورد مثلث های ACD، BCD بکار می‌گیریم (بخاطر داریم که $\angle ACD=\angle DCB$ است). درنتیجه طول نیمساز بصورت $l_c=CD$ بدست می‌آید.

با فرض $AD=x$ و $BD=y$ به $x+y=c$ وصول یافته وطبق خاصیت نیمساز (قضیه ۵)، $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$ بدست می‌آید.

از دستگاه معادلات $\begin{cases}x+y=c,\\ \frac{x}{y}=\frac{b}{a}\end{cases}$ درمی‌یابیم که: $y=\frac{ac}{a+b}$ ، $x=\frac{bc}{a+b}$.

با بکارگیری قانون کسینوس ها (قضیه ۷) در مورد مثلث ACD نتیجه می‌شود که:

$$x^2=b^2+l^2-2bl\cos t \qquad (1)$$

(جهت اختصار، $l_c=l$ و $\angle ACD=\angle DCB=t$ را قرار داده‌ایم).

با استفاده از قانون کسینوس ها در مورد مثلث BCD چنین داریم:

$$y^2=a^2+l^2-2al\cos t \qquad (2)$$

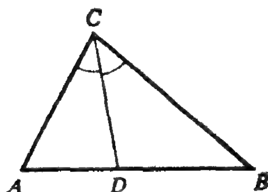
طرفین تساوی (1) را در a و طرفین تساوی (2) را در $(-b)$ ضرب کرده و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم: $ax^2-by^2=ab^2-a^2b+al^2-bl^2$. از این تساوی نتیجه می‌شود که:

$$l^2=\frac{1}{a-b}(x^2a-y^2b)+ab. \quad (3)$$

با گذاشتن مقادیر x و y یافته شده در تساوی (3) چنین حاصل می‌شود:

$$l^2=\frac{1}{a-b}\left(\frac{b^2c^2a}{(a+b)^2}-\frac{a^2c^2b}{(a+b)^2}\right)+ab=ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

بدین ترتیب داریم: $l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$



شکل ۲۷

روش دوم. علاوه بر مجهول l که مطلوب مسئله است یک کمیت مجهول کمکی نیز معرفی می‌کنیم. با قرار دادن $x=\angle ACD=\angle DCB$ از روش مساحتها استفاده می‌کنیم. چنین داریم: $S_{ABC}=S_{ACD}+S_{BCD}$. از یک طرف $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin 2x$ را و از طرف دیگر بدلیل $S_{ACD}=\frac{1}{2}bl\sin x$ و $S_{BCD}=\frac{1}{2}al\sin x$ تساوی $S_{ABC}=\frac{1}{2}al\sin x+\frac{1}{2}bl\sin x$ را داریم. از اینرو $\frac{1}{2}ab\sin 2x=\frac{l(a+b)\sin x}{2}$ بدست می‌آید که از آن نیز $l=\frac{2ab\cos x}{a+b}$ حاصل می‌شود. برای پیدا کردن $\cos x$ قانون کسینوس ها را در مورد مثلث ABC برای ضلع AB بکار می‌گیریم. چنین داریم: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos 2x$

از این رابطه نیز نتیجه می‌شود که: $\cos 2x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. آنگاه داریم:

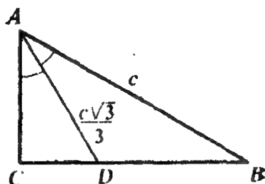
$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$$

بدین ترتیب رابطهٔ زیر استنتاج می‌شود:

$$l=\frac{2ab\cos x}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

در تشکیل معادلات برای حل مسائل هندسی پیشرفت در حل مسائل غالباً به معرفی موفقیت‌آمیز مجهولات بستگی دارد. برای روشن کردن این نکته به مثال زیر می‌پردازیم:

مثال ۶ ● در یک مثلث قائم الزاویه طول وتر برابر c وطول نیمساز یکی از زوایای حاده مثلث برابر $\frac{c\sqrt{3}}{3}$ است. طول اضلاع زاویهٔ قائمه مثلث را پیدا کنید (شکل ۲۸).



شکل ۲۸

حل ● روش اول. با منظور کردن $AC=x$ ، $BC=y$ و $CD=z$ ، طبق قضیه فیثاغورس چنین داریم: $x^2+y^2=c^2$ و $x^2+z^2=\left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2$. علاوه بر این براساس ویژگی نیمساز زاویه (قضیه ۵) $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$ یعنی $\frac{z}{y-z}=\frac{x}{c}$ حاصل می‌شود. سرانجام دستگاه معادلات سه متغیره زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2, \\ x^2+z^2=\frac{c^2}{3}, \\ \frac{x}{c}=\frac{z}{y-z}, \end{cases}$$

حل این دستگاه از پیچیدگی های جبری قابل ملاحظه ای برخوردار است.

روش دوم. تساوی $\angle CAD=\angle BAD=x$ را منظور می‌کنیم. با استفاده از پاره‌خط AC به عنوان «عنصر مرجع» یک معادله تشکیل می‌دهیم. از مثلث ABC به $AC=c\cos 2x$ و از مثلث ACD به $AC=\frac{c\sqrt{3}}{3}$ وصول می‌یابیم. با مساوی قرار دادن این عبارات، معادلهٔ مثلث ها بدست می‌آید: $c\cos 2x=\frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x$. این معادله را حل می‌کنیم:

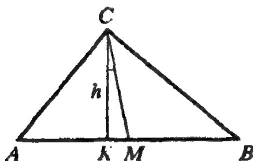
$$\sqrt{3}\cos 2x=\cos x \text{ ، } \sqrt{3}(2\cos^2 x-1)=\cos x \text{ ، } 2\sqrt{3}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{3}=0$$

از این تساوی به $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ وصول می‌یابیم. از آنجا که با توجه به مفاد مسئله، $\cos x>0$ است، بنابراین $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ خواهد بود. از اینرو زاویه BAD برابر $30°$ و زاویه BAC برابر $60°$ خواهد بود. درنتیجه $AC=\frac{c}{2}$ و $BC=\frac{c\sqrt{3}}{2}$ بدست می‌آید.

اگر مسئله یافتن نسبت کمیت های معین (طول ها یا مساحت ها) بویژه یافتن اندازه زاویه ای (که معمولاً به یافتن توابع مثلثاتی معینی از آن زاویه و درنتیجه به یافتن نسبت اضلاع مثلث قائم الزاویه تحویل می‌یابد) مطلوب باشد معمولاً به شرح زیر عمل می‌کنیم: یکی از عناصر خطی را معلوم در نظر گرفته و کمیت های مطلوب را برحسب این عنصر بیان کرده وسپس نسبت این کمیت ها را پیدا می‌کنیم. عنصر خطی منظور شده، پارامتر کمکی و این روش حل مسائل هندسی، روش معرفی پارامتر کمکی نامیده می‌شود. از این روش در حل مسائلی استفاده می‌شود که در آن اشکال هندسی مشابهی وجود دارد.

مثال ۷ ● در مثلث قائم الزاویه ABC ، از رأس قائمه C ، میانه و ارتفاع را رسم می‌کنیم. α ، زاویهٔ بین این دوخط برابر $\arccos\frac{40}{41}$ است.

نسبت اضلاع زاویه قائمه این مثلث را بیابید (شکل ۲۹).



شکل ۲۹

حل ● قبل از همه، ابتدا طبق فرض $\cos\alpha=\frac{40}{41}$ یعنی $\frac{CK}{CM}=\frac{40}{41}$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. با استفاده از روش معرفی پارامتر کمکی به حل مسئله می‌پردازیم. اگر $CK=h$ را در نظر بگیریم، آنگاه $CM=\frac{41}{40}h$ و $KM=\sqrt{CM^2-CK^2}=\frac{9}{40}h$ را خواهیم داشت. از آنجا که در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است (قضیه ٤) از اینرو $AM=CM=MB=\frac{41}{40}h$ را داریم. آنگاه چنین خواهیم داشت:

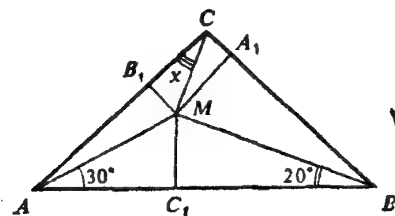
$$AK=AM-KM=\frac{41}{40}h-\frac{9}{40}h=\frac{4}{5}h \text{ ، } KB=KM+BM=\frac{9}{40}h+\frac{41}{40}h=\frac{5}{4}h$$

$$AC=\sqrt{AK^2+CK^2}=\sqrt{\frac{16}{25}h^2+h^2}=\frac{h}{5}\sqrt{41}$$

$$BC=\sqrt{BK^2+CK^2}=\sqrt{\frac{25}{16}h^2+h^2}=\frac{h}{4}\sqrt{41}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{h\sqrt{41}}{5}\div\frac{h\sqrt{41}}{4}=\frac{4}{5}$$

مثال ۸ ● اندازه زاویه C که تارک مثلث متساوی الساقین ABC است برابر $100°$ می‌باشد. دو شعاع رسم می‌کنیم: یکی به مرکز A که با AB زاویه $30°$ می‌سازد و دیگری به مرکز B که با BA زاویهٔ $20°$ می‌سازد. این شعاعها همدیگر را در M قطع می‌کنند. زوایای ACM و BCM را پیدا کنید (شکل ۳۰).



شکل ۳۰

حل ● نقاط M و C را بهم وصل کرده و زاویه ACM را با x نشان می‌دهیم. از نقطه M عمودهایی را به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم: $MC_1\perp AB$ ، $MB_1\perp AC$ و $MA_1\perp BC$. با در نظر گرفتن $CM=a$ پارامتر کمکی را معرفی می‌کنیم و MC_1 را از دو طریق یعنی با استفاده از MC_1 به عنوان عنصر مرجع محاسبه می‌کنیم. از مثلث CMB_1 درمی‌یابیم که $MB_1=MC\sin x=a\sin x$ است. بدلیل اینکه $\angle ACB=100°$ بوده و ABC طبق فرض، متساوی الساقین است

از اینرو $\angle CAB=\angle ABC=40°$ بوده و درنتیجه $\angle CAM=10°$ را خواهیم داشت.

از مثلث AMB_1 نیز $AM=\frac{MB_1}{\sin 10°}=\frac{a\sin x}{\sin 10°}$ را داریم. سرانجام از مثلث AMC_1 چنین حاصل می‌شود: $MC_1=AM\sin 30°=\frac{a\sin x}{2\sin 10°}$. مثلث CMA_1 را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در این مثلث $\angle MCA_1=100°-x$ بوده و از اینرو $MA_1=CM\sin(100°-x)=a\sin(100°-x)$ را خواهیم داشت. بدلیل $\angle MBC=40°-20°=20°$ مثلث‌های BMC_1 و BMA_1 باهم مساوی بوده

ودرنتیجه $MC_1 = MA_1 = a \sin (100° - x)$ را خواهیم داشت. با متساوی‌قرار دادن عبارتهای معادل MC_1 معادله مثلثاتی $\frac{a \sin x}{2 \sin 10°} = a \sin (100° - x)$ بدست می‌آید. از این معادله بترتیب چنین حاصل می‌شود:

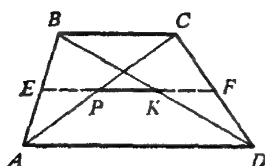
$$\sin x = 2 \sin (100° - x)\cdot \sin 10° \quad ، \quad \sin x = \cos (90° - x) - \cos (110° - x)$$

$$\cos (110° - x) = 0$$

ودرنتیجه $x = 20°$ خواهد بود.

بخش ۲ • مثلث ها وچهارضلعی ها

مثال ۱ • قاعده های ذوزنقه ای عبارت از a و b هستند. طول پاره‌خطی که وسط قطرهای آن را بهم متصل می‌کند پیدا کنید (شکل ۳۱).

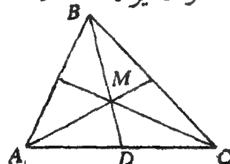


شکل ۳۱

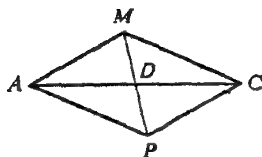
حل • از آنجا که نقطه P وسط قطر AC ونقطه K وسط قطر BD است از اینرو نقاط P و K روی میانه EF ذوزنقه واقع خواهد بود (قضیه ۲c). چون خط EK دوضلع مثلث ABD را بهم وصل می‌کند از اینرو $EK = \frac{a}{2}$ خواهد بود. بدلیل اینکه خط EP نیز وسط دوضلع از مثلث ABC را بهم وصل می‌کند $EP = \frac{b}{2}$ استنتاج می‌شود. بدین ترتیب $PK = EK - EP = \frac{a-b}{2}$ بدست می‌آید.

مثال ۲ • با معلوم بودن میانه های m_a، m_b و m_c از مثلث ABC طول ضلع $AC = b$ را بدست آورید.

حل • طبق قضیه ۳a میانه های مثلث در نقطه ای مانند M متقارب هستند. فاصلهٔ این نقطه از رأس مثلث روی هریک ازمیانه ها برابر دوسوم طول همان میانه است (شکل ۳۲). بنابراین دوضلع از مثلث AMC یعنی $AM = \frac{2}{3} m_a$، $MC = \frac{2}{3} m_c$ و نیز میانه $MD = \frac{1}{3} m_b$ معلوم است. مثلث AMC را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در این مثلث میانه MD را دو برابر کرده و پاره خط MP را بدست می‌آوریم. سپس نقطه P را به نقاط A و C وصل می‌کنیم. در نتیجه متوازی الاضلاع $AMCP$ بدست می‌آید (شکل ۳۳). آنگاه طبق قضیه ۱۱ به: $AC^2 + MP^2 = 2AM^2 + 2MC^2$ یعنی $b^2 + \frac{4}{9} m_b^2 = 2\cdot \frac{4}{9} m_a^2 + \frac{4}{9} m_c^2$ وصول می‌یابیم که از آن نیز $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$ بدست می‌آید.

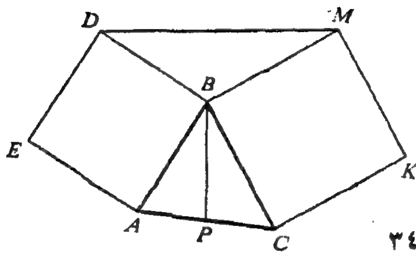


شکل ۳۲



شکل ۳۳

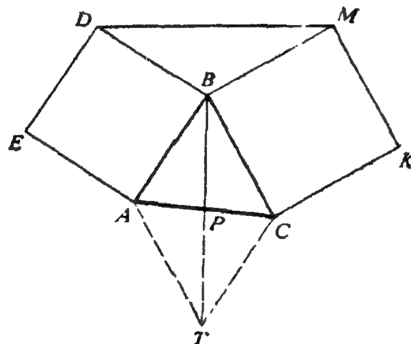
مثال ۳ ● روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC مربعات $ABDE$ و $BCKM$ را رسم کرده ایم. ثابت کنید که طول پاره خط DM دو برابر طول میانه BP از مثلث ABC است (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

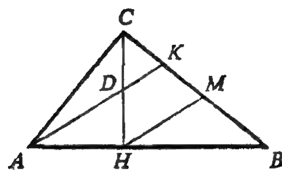
اثبات ● از آنجا که بایستی $DM=2BP$ را ثابت کنیم از اینرو مناسب بنظر می‌رسد که طول BP را دو برابر کرده و مثلث ABC را به متوازی الاضلاع $ABCT$ تبدیل کنیم وسپس $DM=BT$ را ثابت کنیم (شکل ۳۵). برای اثبات برابری DM و BT، این دو پاره‌خط را به عنوان دوضلع از دو مثلث مورد ملاحظه قرار داده وسپس به اثبات تساوی این دو مثلث می‌پردازیم. براساس این طرح، حل مسئله مفروض انجام می‌گیرد.

با ادامه دادن پاره‌خط BP به اندازه‌ای که برابر خود BP است و نیز با اتصال نقطه T که انتهای این امتداد است به نقاط A و C به متوازی الاضلاع $ABCT$ وصول می‌یابیم. مثلث های DMB و BCT را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. چنین داریم: (a) به عنوان اضلاع مربع $BMKC$ تساوی $BM=BC$ برقرار است؛ (b) $DB=CT$ (بطور مشروح در مورد این تساوی چنین می‌توان گفت: به عنوان اضلاع مربع $BDEA$، $DB=AB$ و به عنوان اضلاع مقابل متوازی اضلاع $ABCT$، $AB=CT$ بوده و از اینرو $DB=CT$ خواهد بود)؛ (c) $\angle DBM=\angle BCT$ (دوزاویه ای که اضلاع آنها بر هم عمود هستند). از اینرو $\triangle DBM=\triangle BCT$ (به حالت دوضلع وزاویه بین آنها) و درنتیجه $DM=BT$ حاصل می‌شود. بدلیل $BT=2BP$ از $DM=BT$ تساوی $DM=2BP$ استنتاج می‌شود.



شکل ۳۵

مثال ٤ ● درمثلث قائم الزاویه ای ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو قسمت با طول های 9cm و 16cm تقسیم می‌کند. از رأس زاویهٔ حاده بزرگتر مثلث و وسط ارتفاع مثلث خطی عبور می‌دهیم. قسمتی از این خط را که در داخل مثلث قرار دارد پیدا کنید (شکل ۳٦).



شکل ۳۶

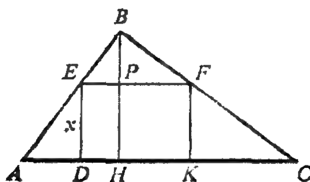
حل • چنین داریم: $CH^2=AH\cdot BH$ (قضیه ٦a)؛ و از اینرو $CH^2=9\cdot16$ یعنی $CH=12\text{cm}$ حاصل می‌شود. از $\triangle ADH$ به $AD=\sqrt{9^2+6^2}=3\sqrt{13}\text{cm}$ دست می‌یابیم. خط HM را بصورت $HM\|AK$ رسم کرده و $DK=x$ را در نظر می‌گیریم. بدلیل اینکه DK خط واصل وسط دوضلع از $\triangle HCM$ است از اینرو $HM=2x$ است. از آنجا که مثلث های HMB و AKB متشابه هستند از اینرو $\frac{HM}{AK}=\frac{BH}{AB}$ یعنی $\frac{16}{25}=\frac{2x}{x+3\sqrt{13}}$ استنتاج شده و از آن نیز چنین بدست می‌آید:

$x=\frac{24\sqrt{13}}{17}$ و $AK=3\sqrt{13}+\frac{24\sqrt{13}}{17}=\frac{75\sqrt{13}}{17}$. بدین ترتیب داریم:

$$AK=\frac{75\sqrt{13}}{17}\ \text{cm}$$

مثال ۵ • مستطیلی را در داخل مثلثی با اضلاع 10cm، 17cm و 21cm طوری محاط کرده‌ایم که دو رأس مستطیل بر روی یک ضلع و دورأس دیگر آن بر روی دوضلع مثلث منطبق شده است. اگر محیط مستطیل برابر 22.5cm باشد طول اضلاع آن را بدست آورید.

حل • ابتدا قبل از هر چیز نوع مثلث مطروحه را پیدا می‌کنیم. چنین داریم: $10^2=100$، $17^2=289$ و $21^2=441$. از آنجا که $10^2+17^2<21^2$ است از اینرو (طبق قضیه ۹) مثلث مزبور منفرجة الزاویه بوده و درنتیجه مستطیل را فقط به یک طریق می‌توان در آن محاط کرد و در این طریق دورأس آن روی ضلع بزرگتر مثلث قرار می‌گیرد (شکل ۳۷). آنگاه به یافتن ارتفاع BH از مثلث ABC مبادرت می‌کنیم. با بکارگیری روش مثال ٤ بخش ۱ (یا فرمول استنتاج شده در آن مثال) به $BH=8\text{cm}$ وصول می‌یابیم. با قرار دادن $ED=x$ به $EF=11.25-x$ (بدلیل اینکه محیط مستطیل $DEFK$ برابر 22.5cm است) و $BP=8-x$ می‌رسیم. مثلث های BEF و ABC مشابه هستند، از اینرو $\frac{EF}{AC}=\frac{BP}{BH}$ (در مثلث های مشابه نسبت ارتفاعات متناظر با نسبت تشابه برابر است) یعنی $\frac{11.25-x}{21}=\frac{8-x}{8}$ را خواهیم داشت که از آن نیز $x=6$ استنتاج می‌شود. بدین ترتیب طول وعرض مستطیل بترتیب 6cm و 5.25cm خواهد بود.



شکل ۳۷

مثال ٦ • در مثلث ABC زاویه A دوبرابر زاویه C، ضلع BC از ضلع AB، ۲cm بیشتر بوده و

$AC = 5$ cm است. AB و BC را پیدا کنید.

حل ● روش اول ــ با رسم نیمساز AD درزاویه A به $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$ دست می‌یابیم (شکل ۳۸). درمثلث ADC زاویه‌های مجاور قاعده متساوی بوده و از اینرو مثلث مزبور متساوی الساقین خواهد بود یعنی تساوی $AD = DC$ را خواهیم داشت.

با قرار دادن $AB = x$ و $AD = DC = y$ درمی‌یابیم که $BC = x + 2$ و $BD = x + 2 - y$ است. مثلث های ABD و ABC مشابه هستند. دلیل امر این است که $\angle BAD = \angle BCA$ بوده و $\angle B$ زاویه مشترک آنهاست. از تشابه این دومثلث، $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ یعنی: $\frac{y}{5} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{x}{x+2}$ استنتاج می‌شود. برای یافتن x و y به دستگاه دو معادله دو متغیرهٔ:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5} \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5} \end{cases}$$

وصول می‌یابیم که از آن نیز $\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy \end{cases}$ بدست می‌آید.

تفریق معادله دوم این دستگاه از معادله اول آن به $2y = 10 - 5y$ و $y = \frac{10}{3}$ منتهی می‌شود. بنابراین $\frac{2}{3} = \frac{x}{x+2}$ یعنی $x = 4$ بدست می‌آید. بدین ترتیب $AB = 4$ cm و $BC = 6$ cm خواهد بود.

روش دوم ــ با قرار دادن $\angle C = t$ به $\angle A = 2t$ و $\angle B = 180° - 3t$ دست می‌یابیم. همچنین منظور کردن $AB = x$ به $BC = x + 2$ منتهی می‌شود. طبق قانون سینوس ها (قضیه ۸) چنین داریم: $\frac{5}{\sin(180° - 3t)} = \frac{x+2}{\sin 2t} = \frac{x}{\sin t}$. بدین ترتیب دستگاه دو معادلهٔ دومتغیره زیر که در آن از $\sin(180° - 3t) = \sin 3t$ استفاده شده است برحسب x و t بدست می‌آید:

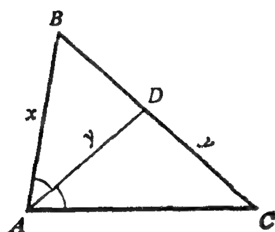
$$\begin{cases} \frac{x}{\sin t} = \frac{x+2}{\sin 2t} \\ \frac{x}{\sin t} = \frac{5}{\sin 3t} \end{cases}$$

به حل این دستگاه مبادرت می‌کنیم.

از معادله دوم دستگاه به $x = \frac{5 \sin t}{\sin 3t} = \frac{5 \sin t}{3 \sin t - 4 \sin^3 t} = \frac{5}{3 - 4 \sin^2 t}$ و از معادله اول نیز به $\frac{\sin 2t}{\sin t} = \frac{x+2}{x}$ یعنی $2 \cos t = \frac{2}{x} + 1$ وصول می‌یابیم. با قرار دادن عبارت معادل x برحسب t در تساوی آخر به $2 \cos t = \frac{6 - 8 \sin^2 t}{5} + 1$ می‌رسیم. با منظور کردن $\cos t = z$ در این معادله مثلثاتی معادله $2z = \frac{6 - 8(1 - z^2)}{5} + 1$ بدست می‌آید که از آن نیز $z_1 = \frac{3}{4}$ یا $z_2 = \frac{1}{2}$ یعنی: $\cos t = \frac{3}{4}$ یا $\cos t = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود. اگر $\cos t = \frac{3}{4}$ باشد آنگاه از $2 \cos t = \frac{2}{x} + 1$ به $x = 4$ دست می‌یابیم. اگر $\cos t = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه از $2 \cos t = \frac{2}{x} + 1$ به $1 = \frac{2}{x} + 1$ وصول می‌یابیم که ممتنع است. بدین ترتیب $AB = 4$ cm و $BC = 6$ cm خواهد بود.

تذکر ● عبارت $\cos t = \frac{1}{2}$ به معنی $t = 60°$ است که از آن نیز در مثلث ABC زوایای $\angle C = 60°$ و

$\angle A = 120°$ بدست می‌آید که غیرممکن است.



شکل ۳۸

مثال ۷ ● در مستطیل $ABCD$ (شکل ۳۹) نقطه K وسط ضلع AD است. اگر $AD:AB = \sqrt{2}$ باشد زاویهٔ بین BK و AC را بیابید.

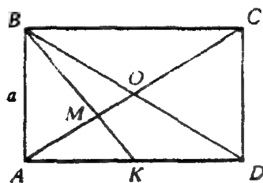
حل ● از روش پارامتر کمکی استفاده می‌کنیم (به مثال ۷ بخش ۱ رجوع کنید). منظور کردن $AB = a$ به $AD = a\sqrt{2}$ منجر می‌شود. طرح کلی حل مسئله به شرح زیر است: همهٔ اضلاع مثلث AMK را برحسب a بیان کرده و سپس در مورد ضلع AK قانون کسینوس ها را اعمال می‌کنیم. این امر محاسبه کسینوس زاویه AMK را که با x نشان داده می‌شود ممکن می‌سازد. پاره‌خط های AO و BK میانه های مثلث ABD هستند. از اینرو (طبق قضیه ۳a) $MK = \frac{1}{3} BK$ و $AM = \frac{2}{3} AO$ را داریم. بدین ترتیب نتیجه می‌شود که:

$$MK = \frac{1}{3} BK = \frac{1}{3} \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$AM = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

در مثلث AMK نیز چنین داریم: $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ و $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ و $MK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. طبق قانون کسینوس ها (قضیه ۷)، $AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2AM \cdot MK \cdot \cos x$ یعنی:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cos x$$



شکل ۳۹

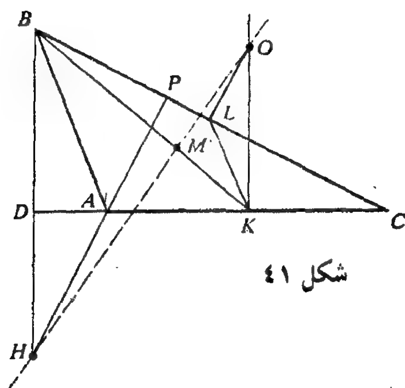
و سرانجام $\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{2}}{3} \cos x$ استنتاج می‌شود که از آن نیز $\cos x = 0$ و درنتیجه $x = 90°$ حاصل می‌شود.
بدین ترتیب BK و AC باهم زاویه قائمه می‌سازند.

مثال ۸ ● ثابت کنید که در هر مثلثی مانند ABC فاصله مرکز ارتفاعی از رأس B دو برابر فاصله مرکز دایره محیطی مثلث از ضلع AC است.

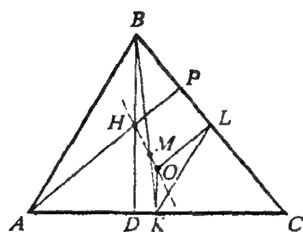
برهان ● مثلث حادة‌الزاویه ABC را با مرکز ارتفاعی H، مرکز دایرهٔ محیطی O، ارتفاعات BD و AP، و نیز با نقاط K و L به عنوان وسط اضلاع، OK و OL که عمود بر اضلاع هستند در نظر می‌گیریم

(شکل ۴۰). مثلث های ABH و KOL متشابه هستند (بدلیل $OK \parallel BH$، $OL \parallel AH$، $AB \parallel LK$)؛ و از اینرو $\frac{BH}{OK} = \frac{AB}{LK}$ را داریم. پاره‌خط LK وسط دوضلع $\triangle ABC$ را بهم وصل کرده و از اینرو $\frac{AB}{LK} = 2$ است. و آنگاه $\frac{AB}{OK} = 2$ بوده و مطلوب مسئله اثبات می‌گردد.

حال فرض کنید که مثلث ABC یک مثلث منفرجة الزاویهٔ غیر متساوی الساقین باشد. عبارات مورد استفاده برای اثبات مسئله به همان صورت حالت اول خواهد بود. (شکل ۴۱). از تشابه مثلث های ABH و KOL به $\frac{BH}{OK} = \frac{AB}{LK} = 2$ و درنتیجه به $BH = 2OK$ دست می‌یابیم. خطوط نقطه‌چین مرسوم در اشکال ۴۰ و ۴۱ را خط اولر می‌نامند (به تمرین شماره ۵۴ مراجعه کنید).



شکل ۴۱



شکل ۴۰

مثال ۹ ● در صفحه مثلث متساوی الاضلاعی خطی را از مرکز ثقل (گرانیگاه) مثلث عبور می‌دهیم ثابت کنید که مجموع مربعات فاصله های رئوس مثلث از این خط مستقل از انتخاب آن است.

اثبات ● فرض کنید که خط مورد نظر با قاعده AC از مثلث ABC زاویه ای برابر α تشکیل دهد (شکل ۴۲). عبارات $AO = BO = CO = a$ را در نظر می‌گیریم. خطوط AD، BK و CE عمود بر این خط مطروحه را برحسب a و α بیان کرده و ثابت می‌کنیم که به ازاء هر مقدار α عبارت $AD^2 + BK^2 + CE^2$ مقداری ثابت است. از آنجا که $\angle OAC = 30°$ است از اینرو $\angle MAO = 150°$ بوده و آنگاه $\angle DOA = 180° - (\alpha + 150°) = 30° - \alpha$ را خواهیم داشت.

از $\triangle DOA$ به $AD = OA \sin \angle AOD = a \sin (30° - \alpha)$ وصول می‌یابیم.

از $\triangle MOP$ به $\angle BOK = \angle MOP = 90° - \alpha$ می‌رسیم.

از $\triangle BOK$ به $BK = BO \sin \angle BOK = a \sin (90° - \alpha) = a \cos \alpha$ می‌رسیم.

بدلیل $\angle POE = 90° + \alpha$ (زاویه خارجی $\triangle MOP$) و $\angle POC = 60°$ چنین داریم:

$$\angle COE = \angle POE - \angle POC = (90° + \alpha) - 60° = 30° + \alpha$$

از $\triangle COE$ به $CE = CO \sin \angle COE = a \sin (30° + \alpha)$ دست می‌یابیم. چنین نتیجه می‌شود:

$$AD^2 + BK^2 + CE^2 = a^2 \sin^2 (30° - \alpha) + a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 (30° + \alpha)$$
$$= a^2 \left(\frac{1 - \cos (60° - 2\alpha)}{2} + \cos^2 \alpha + \frac{1 - \cos (60° + 2\alpha)}{2} \right)$$
$$= a^2 \left(1 - \frac{\cos (60° + 2\alpha) + \cos (60° - 2\alpha)}{2} + \cos^2 \alpha \right)$$
$$= a^2 \left(1 - \cos 60° \cos 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)$$
$$= a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) = \frac{3}{2} a^2$$

وبدین ترتیب به ازاء هر مقدار α نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$AD^2 + BK^2 + CE^2 = \frac{3}{2} a^2$$

شکل ۴۲

مثال ۱۰ ● اگر در مثلث ABC میانه AM، ارتفاع BH و نیمساز CD در یک نقطه متقارب باشند رابطه بین طول اضلاع a، b و c آن مثلث را بدست آورید (شکل ۴۳).

حل ● طبق قضیه سوا (قضیه ۱۰) چنین داریم: $\frac{AD}{BD} \times \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CH}{AH} = 1$. از آنجا که AM میانه مثلث است از اینرو $BM = CM$ و $\frac{BM}{CM} = 1$ خواهد بود.

بدلیل نیمساز بودن CD نیز، $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}$ (قضیه ۵) خواهد بود. بدین ترتیب رابطه مفروض به شکل $\frac{b}{a} \cdot \frac{CH}{AH} = 1$ یعنی $\frac{CH}{AH} = \frac{a}{b}$ درمی‌آید.

با قرار دادن $CH = at$ و $AH = bt$ از طرف دیگر $at + bt = b$ یعنی $t = \frac{b}{a+b}$ را خواهیم داشت.

همچنین با استفاده از BH به عنوان عنصر مرجع از $\triangle ABH$ به $BH^2 = c^2 - b^2t^2$ و از $\triangle BHC$ به $BH^2 = a^2 - a^2t^2$ وصول می‌یابیم.

از اینرو $c^2 - b^2t^2 = a^2 - a^2t^2$ نتیجه می‌شود که از آن نیز $t^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}$ بدست می‌آید. باجاگذاری $t = \frac{b}{a+b}$ در تساوی اخیر رابطه مطلوب بین اضلاع a، b و c بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2 - c^2}{a - b}$$

شکل ۴۳

مسائل

۱ • مثلث های قائم الزاویه

۱ • ثابت کنید که در مثلث قائم الزاویه نیمساز زاویه قائمه، زاویه بین ارتفاع و میانه مرسوم از همان زاویه را نصف می‌کند.

۲ • در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وترزاویه قائمه را به نسبت $1:2$ تقسیم کرده وطول آن معادل m است. اضلاع مثلث را بیابید.

۳ • نقطه ای بر روی وتر مثلث قائم الزاویه که از اضلاع قائمه مثلث هم فاصله است وتر را به دوقطعه به طولهای $30\ cm$ و $40\ cm$ تقسیم می‌کند. طول اضلاع زاویه قائمه مثلث را بدست آورید.

۴ • طول اضلاع زاویه قائمه یک مثلث قائم الزاویه $18\ cm$ و $24\ cm$ است. طول نیمساز زوایای حاده این مثلث را بدست آورید.

۵ • نیمساز زاویه قائمه مثلث قائم الزاویه ای را پیدا کنید که طول اضلاع زاویه قائمه آن a و b است.

۶ • نیمساز زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه وتر را به دوپاره خط به طول های m و n تقسیم می‌کند. طول ارتفاع وارد بر وتر را پیدا کنید.

۷ • در مثلث قائم الزاویه ای طول میانه های وارد بر اضلاع زاویه قائمه معادل $\sqrt{52}\ cm$ و $\sqrt{73}cm$ است. طول وتر آن را بیابید.

۸ • محیط مثلث قائم الزاویه ای برابر $60\ cm$ وطول ارتفاع وارد بر وتر آن معادل $12\ cm$ است. اضلاع زاویه قائمه این مثلث را محاسبه کنید.

۹ • در مثلث قائم الزاویه ABC ازرأس زاویه قائمه C ، نیمساز CK ومیانه CM را رسم می‌کنیم. اگر $CM=m$ و $KM=n$ باشد درآنصورت طول اضلاع زاویه قائمه را بدست آورید.

۱۰ • دریک مثلث قائم الزاویه اندازهٔ یکی اززوایای حاده برابر α است. زاویه بین نیمساز و میانه مرسوم ازرأس این زاویه را پیدا کنید.

۱۱ • در مثلث قائم الزاویه ABC ، AD و BK ، نیمساز زوایای حاده را رسم می‌کنیم. اگر $AB^2 = AD\cdot BK$ باشد زوایای مثلث را پیدا کنید.

۱۲ • اگر دریک مثلث غیر متساوی الساقین ارتفاع و میانه مرسوم ازیک رأس مثلث در داخل مثلث واقع شده وبا اضلاع آن زاویه، زاویه های متساوی درست کنند، آنگاه ثابت کنید که این مثلث، قائم الزاویه است.

۲ • مثلث های متساوی الساقین

۱۳ • ثابت کنید اگر درمثلثی، نسبت تانژانت دوزاویه با نسبت مربعات سینوس های این دوزاویه برابر باشد درآنصورت مثلث مطروحه یا متساوی الساقین ویا قائمه خواهد بود.

۱۴ • ثابت کنید اگر در مثلثی رابطه $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ برقرار باشد آنگاه مثلث مز بور متساوی الساقین خواهد بود.

۱۵ • طول قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر $4\sqrt{2}$cm وطول میانه وارد بر ضلع جانبی آن برابر 5cm است. طول این ضلع را پیدا کنید.

۱۶ • طول ضلع جانبی مثلث متساوی الساقینی برابر 4cm و طول میانهٔ وارد بر این ضلع برابر 3cm است. طول قاعده مثلث را پیدا کنید.

۱۷ • طول قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر 12 cm وطول ضلع جانبی آن برابر 18 cm است. ارتفاعات وارد بر اضلاع جانبی را رسم می‌کنیم. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که پای ارتفاعات دوسر آن است.

۱۸ • طول قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر 12 cm وطول ضلع جانبی آن برابر 18 cm است. نیمساز زوایایی از آن را که بر اضلاع جانبی وارد می‌شوند رسم می‌کنیم. پای این نیمسازها را بهم وصل می‌کنیم. طول پاره‌خط حاصل از اتصال پای نیمسازها را پیدا کنید.

۱۹ • مجموع دو ارتفاع نامساوی از یک مثلث متساوی الساقین برابر l و اندازهٔ تارک آن برابر α است. طول ضلع جانبی مثلث را بیابید.

۲۰ • نقطه M روی ارتفاع BH از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ طوری انتخاب شده است که زوایای AMB ، BMC و AMC باهم برابرند. اگر زاویه مجاور به قاعده برابر α باشد، نقطه M ارتفاع مرسوم را به چه نسبتی (از طرف تارک) تقسیم می‌کند؟

۲۱ • اندازه زاویه های مجاور به قاعده در مثلث متساوی الساقین برابر α است. نسبت قاعده به میانه وارد بر ضلع جانبی مثلث را بیابید.

۲۲ • اگر در مثلث متساوی الساقینی مرکز ارتفاع وارد بر قاعده را نصف کند زوایای آن را پیدا کنید.

۲۳ • خطوط l_1 ، l_2 و l_3 باهم موازی بوده و l_2 بین l_1 و l_3 قرار دارد. فاصله های خط وسط از خطوط دیگر بترتیب برابر p و q است. طول اضلاع مثلث متساوی الاضلاعی را پیدا کنید که هریک از رئوس آن روی هریک از سه خط مفروض قرار دارد.

۲۴ • نقطه D روی ضلع AB ونقطه E روی ضلع BC مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ طوری قرار دارند که $BD = CE$ است. ثابت کنید که وسط پاره‌خط DE بر خط واصل اوساط وساق مثلث منطبق است.

۲۵ • در مثلث متساوی الساقینی، اندازهٔ زاویه تارک برابر $36°$ وطول قاعدهٔ آن برابر a است. طول اضلاع جانبی مثلث را پیدا کنید.

۲۶ • نقطه D روی ضلع BC از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ طوری انتخاب شده است که $BD:DC = 1:4$ است. $BM:ME$ را پیدا کنید بطوریکه BE ارتفاع مثلث و M نقطه تلاقی BE و

AD باشد.

۲۷ • طول قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر a و اندازهٔ زاویه تارک آن برابر 2α است. طول نیمساز زاویه ای از آن را که برضلع جانبی وارد می‌شود پیدا کنید.

۲۸ • خط مرسوم از یک رأس مثلث متساوی الاضلاعی ضلع مقابل را به نسبت $2:1$ تقسیم می‌کند. اندازهٔ زاویه های تشکیل شده با این خط و اضلاع مجاور زاویه مزبور چقدر است؟

۲۹ • زاویه مجاور قاعده مثلث متساوی الساقین برابر $\arctan \frac{3}{4}$ است. زاویه بین میانه و نیمساز مرسوم برضلع جانبی مثلث را بیابید.

۳۰ • در مثلث متساوی الساقینی میانه وارده برضلع جانبی مثلث با قاعده زاویه $\arcsin \frac{3}{5}$ می‌سازد. زاویه تارک مثلث را پیدا کنید.

۳۱ • زاویه B از مثلث متساوی الساقین ABC برابر $110°$ است. در داخل مثلث نقطه M را طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle MAC = 30°$ و $\angle MCA = 25°$ باشد. زاویه BMC را محاسبه کنید.

۳ • مثلث های دلخواه

۳۲ • ثابت کنید اگر دوضلع و ارتفاع یک مثلث حادة الزاویه با دوضلع و ارتفاع مثلث حادة الزاویه دیگری برابر باشد آنگاه این دو مثلث باهم برابر خواهند بود (دوحالت را مورد بررسی قرار دهید).

۳۳ • ثابت کنید اگر دوضلع و میانهٔ یک مثلث بترتیب با دوضلع و میانه مثلث دیگری برابر باشد آنگاه دومثلث باهم برابر خواهند بود (دوحالت را درنظر بگیرید).

۳۴ • ثابت کنید که در هر مثلث نیمساز یک زاویه یا بر ارتفاع و میانه مرسوم از آن زاویه واقع است و یا بین آندو قرار دارد.

۳۵ • ثابت کنید که در هر مثلث مجموع میانه ها از $\frac{3}{4}$ محیط آن مثلث بزرگتر و از تمام محیط آن کوچکتر است.

۳۶ • l، خط مارّ از مرکز ثقل مثلث متساوی الاضلاع ABC، اضلاع AB و BC را قطع می‌کند. ثابت کنید که مجموع فواصل A و C از l با فاصله B از l برابر است.

۳۷ • زاویه B از مثلث ABC برابر $115°$ است. از میانگاه ضلع AC عمودی را برآن رسم می‌کنیم و این عمود ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند. پاره‌خط AD زاویه A را از طرف ضلع AB به نسبت $5:3$، تقسیم می‌کند. زاویه های A و C از مثلث ABC را بدست آورید.

۳۸ • نیمساز زاویه مثلثی ضلع مقابل به آن زاویه را به پاره‌خط هایی به طول $2\ cm$ و $4\ cm$ تقسیم کرده و طول ارتفاع وارد بر همان ضلع نیز برابر $\sqrt{15}\ cm$ است. طول اضلاع مثلث را پیدا کرده و نوع آن را تعیین کنید.

۳۹ • نسبت مجموع مربعات میانه های مثلث بر مجموع مربعات اضلاع آن را بدست آورید.

۴۰ • اگر در مثلثی رابطه $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ بین میانه های آن برقرار باشد نوع مثلث را تعیین کنید.

۴۱ • طول دوضلع از مثلثی برابر a و b بوده و میانه های وارد بر این دوضلع نیز متعامدهستند. طول ضلع سوم مثلث را بدست آورید.

۴۲ • در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم. اگر $AC=b$، $AB=a$ و $AD=BD$ باشد طول BC را پیدا کنید.

۴۳ • در مثلث ABC، $AC=8\text{cm}$، $BC=12\text{cm}$ است. زاویه A در این مثلث دو برابر زاویه B است. طول AB را محاسبه کنید.

۴۴ • طول ارتفاع مثلثی برابر 6 cm بوده و ارتفاع، زاویه مربوط به خود را نیز به نسبت $2:1$ تقسیم کرده است. ارتفاع مزبور قاعده را نیز به دو قسمت تقسیم کرده است که طول کوچکترین آنها 3 cm است. اضلاع مثلث را بدست آورید

۴۵ • ارتفاع مثلثی زاویه ای را که ارتفاع از آن رسم شده است به نسبت $2:1$ قطع کرده است. این ارتفاع قاعده را نیز به پاره‌خط هایی تقسیم کرده است که نسبت آنها k $(k > 1)$ می‌باشد. اندازهٔ بزرگترین زاویه مجاور به قاعده را محاسبه کنید.

۴۶ • در مثلث حادة الزاویه ABC، زاویه حاده بین ارتفاع های AD و CE برابر α است. اگر $AD=a$ و $CE=b$ باشد آنگاه AC را بدست آورید.

۴۷ • طول قاعدهٔ مثلثی برابر ۴ است. طول میانهٔ وارد بر این قاعده برابر $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ بوده و یکی از زوایای مجاور قاعده نیز برابر $15°$ می‌باشد. زاویه حاده بین میانه و قاعده را بدست آورید.

۴۸ • با استفاده از قضیه سِوا ثابت کنید که:

(a) میانه های مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؛

(b) نیمسازهای زوایای مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

(c) تلاقی ارتفاعات مثلث در یک نقطه مشترک انجام می‌گیرد.

۴۹ • خط DE موازی قاعده AC از مثلث ABC بوده و نقطه D روی ضلع AB و نقطه E روی ضلع BC قرار دارد. ثابت کنید که AE، CD و میانه BM همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۵۰ • اگر طول اضلاع مثلثی یک تصاعد حسابی تشکیل دهند، آنگاه ثابت کنید که مرکز دایره محاطی این مثلث و مرکز ثقل آن روی خط مستقیمی قرار دارند که با ضلع میانی مثلث موازی است.

۵۱ • در مثلث ABC، AD ارتفاع بوده و نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث است. ثابت کنید که:

$$DC \cdot DB = AD \cdot DH$$

۵۲ • در مثلث ABC، زاویه A برابر $30°$ و زاویه B برابر $50°$ است. ثابت کنید که بین اضلاع آن رابطه $c^2 = b(a+b)$ برقرار است.

۵۳ • ثابت کنید که در هر مثلثی تفاضل بین مجموع مربعات هر دوضلع از آن با حاصلضرب همان دو

ضلع وزاویه بین آن دوضلع مقداری است ثابت.

۵۴ ● ثابت کنید در هر مثلث مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایره محیطی بر روی یک خط مستقیم (خط اولر) قرار دارند.

۵۵ ● در مثلث های ABC و $A'B'C'$ زوایای B و B' برابر بوده و مجموع زوایای A و A' برابر $180°$ است. ثابت کنید که بین اضلاع این زوایا رابطه $aa' = bb' + cc'$ برقرار است.

۵۶ ● در مثلث ABC اندازه A ، B و C باهم دارای نسبت $4:2:1$ است. ثابت کنید که بین اضلاع مثلث تساوی $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ برقرار است.

۵۷ ● ارتفاع، میانه ونیمساز مرسوم ازیک زاویه درمثلثی، آن زاویه را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند. اندازه زوایای مثلث را بیابید.

۵۸ ● در مثلث ABC ، CD ارتفاع است. اگر $CD^2 = AD \cdot DB$ باشد آنگاه رابطه بین زوایای A و B را بیابید.

۵۹ ● در مثلث ABC اندازه زاویه A برابر α و اندازهٔ زاویه B برابر β بوده و میانه BD نیمساز CE را در نقطه K قطع می‌کند. $CK:KE$ را بیابید.

۴ ● متوازی الاضلاع ها

۶۰ ● اگر در متوازی الاضلاعی اقطار نیمسازها زوایای آن باشد آنگاه ثابت کنید که متوازی الاضلاع مزبور یک لوزی است.

۶۱ ● در متوازی الاضلاعی با اضلاع a و b $(a > b)$ نیمسازهای زوایای داخلی را رسم می‌کنیم. نوع چهارضلعی حاصله از تقاطع نیمسازها را تعیین کرده وطول اقطار این چهارضلعی را پیدا کنید.

۶۲ ● در یک لوزی ارتفاع وارد بر یک ضلع آن را به دو پاره خط به طول m و n تقسیم می‌کند. اقطار لوزی را محاسبه کنید.

۶۳ ● در یک متوازی الاضلاع عمود مرسوم ازیک رأس آن بر یک قطر متوازی الاضلاع، قطر را به دو پاره خط به طول های 6 cm و 15 cm تقسیم می‌کند. اگر تفاضل بین دوضلع غیر متوازی الاضلاع برابر 7cm باشد در آنصورت طول اضلاع و اقطار متوازی الاضلاع را محاسبه کنید.

۶۴ ● ازیکی اززوایای منفرجه متوازی الاضلاعی دو ارتفاع بترتیب با طول های p و q رسم می‌کنیم. زاویه بین این دو ارتفاع برابر α است. طول قطر اطول متوازی الاضلاع را محاسبه کنید.

۶۵ ● قطر مرسوم ازیک زاویه مستطیلی آن زاویه را به نسبت $m:n$ تقسیم کرده است. نسبت محیط مستطیل را بر قطر آن پیدا کنید.

۶۶ ● اندازه زاویه حاده متوازی الاضلاعی برابر α وطول اضلاع غیرموازی آن برابر a و b است. تانژانت زوایای حاده‌ای که با قطر اطول و اضلاع متوازی الاضلاع تشکیل می‌شود محاسبه کنید.

۶۷ ● اگر در لوزی $ABCD$ خط مستقیم مرسوم از رأس A زاویه BAD را به نسبت $1:3$ وضلع BC را به نسبت $3:5$ قطع کند آنگاه اندازه زوایای حاده و لوزی را پیدا کنید.

۶۸ ● نسبت محیط یک لوزی به مجموع اقطار آن برابر k است. زوایای لوزی را بیابید.

۶۹ ● اقطار یک متوازی الاضلاع با اضلاع غیرموازی آن متناسب است. ثابت کنید که زوایای بین اقطار با زوایای متوازی الاضلاع مساوی است.

۷۰ ● در مستطیل $ABCD$ ، قاعدهٔ AD را با نقاط M و P به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر $AD=3AB$ باشد آنگاه ثابت کنید که حاصل جمع زوایای AMB ، APB برابر 90° است.

۷۱ ● اضلاع یک متوازی الاضلاع برابر a و b $(a < b)$ است. قطر اقصر متوازی الاضلاع با ضلع کوچکتر آن یک زاویه منفرجه و با ضلع بزرگتر متوازی الاضلاع زاویه‌ای برابر α می‌سازد. قطر اطول متوازی الاضلاع را بیابید.

۷۲ ● نسبت اضلاع یک متوازی الاضلاع بصورت $p:q$ بوده و قطرهای آن نیز دارای نسبت $m:n$ است. زوایای متوازی الاضلاع را بیابید.

۷۳ ● نسبت محیط یک متوازی الاضلاع بر قطر اطول آن برابر k است. اگر قطر اطول زوایای متوازی الاضلاع را به نسبت $1:2$ تقسیم کند آنگاه اندازه زوایای آن را بیابید.

۵ ● ذوزنقه ها

۷۴ ● ثابت کنید که اگر اضلاع یک ذوزنقه با اضلاع متناظر به آنها در ذوزنقهٔ دیگر برابر باشد آنگاه آن دو ذوزنقه متساوی خواهند بود.

۷۵ ● قضیه زیر را ثابت کنید: برای متساوی الساقین بودن یک ذوزنقه لازم و کافی است که: (a) زوایای مجاور به قاعده باهم متساوی باشند، (b) اقطار ذوزنقه برابر باشند.

۷۶ ● ثابت کنید که نیمسازهای دوزاویه مجاور به ضلع جانبی ذوزنقه باهم زاویه قائمه تشکیل می‌دهند ونقطه تقاطع آنها بر روی خط واصل اوساط دوضلع غیرموازی ذوزنقه واقع است.

۷۷ ● مجموع زوایای مجاور به قاعده بزرگ ذوزنقه ای برابر 90° است. ثابت کنیدکه خط واصل اوساط دو قاعده با نصف تفاضل دوقاعده برابر است.

۷۸ ● اقطار یک ذوزنقه مساوی و متعامد هستند وطول ارتفاع آن برابر 15 cm است. طول میانه ذوزنقه را پیدا کنید.

۷۹ ● طول یکی از قاعده های ذوزنقه ای برابر 24 cm وفاصله بین اوساط اقطار آن نیز معادل 4 cm است. طول قاعدهٔ دیگر ذوزنقه را پیدا کنید.

۸۰ ● یکی از زوایای ذوزنقه ای برابر 30° بوده و اضلاع جانبی آن بر هم عمود هستند. اگر طول میانه ذوزنقه برابر 10 cm و طول یکی از قاعده های آن برابر 8 cm باشد در اینصورت طول ضلع جانبی کوچکتر

آن را پیدا کنید.

۸۱ ● در یک ذوزنقهٔ قائم الزاویه طول قاعده ها و ضلع جانبی کوچکتر برابر a ، b و c است. طول ضلع جانبی کوچکتر و فاصله نقطه تلاقی اقطار از قاعده های ذوزنقه را پیدا کنید.

۸۲ ● نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای منفرجه ذوزنقه ای روی قاعدهٔ مقابل قرار دارد و طول آنها 13 cm و 15 cm است. اگر طول ارتفاع ذوزنقه برابر 12 cm باشد آنگاه طول اضلاع ذوزنقه را بیابید.

۸۳ ● طول ارتفاع ذوزنقه متساوی الساقینی برابر h و زاویه حاده بین اقطار آن نیز برابر 2α است. طول میانه ذوزنقه را پیدا کنید.

۸۴ ● در ذوزنقه $ABCD$ ، زوایای A و B قائمه بوده و $AB=5$ cm، $BC=1$ cm و $AD=4$ cm است. نقطه M را روی ضلع AB طوری اختیار می‌کنیم که زاویه AMD دو برابر BMC شود. نسبت $AM:MB$ را بیابید.

۸۵ ● اندازه زاویه A از ذوزنقه $ABCD$ برابر α و طول ضلع جانبی AB دو برابر قاعده کوچکتر BC است. زاویه BAC را بدست آورید.

۸۶ ● طول قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه برابر a ، طول اضلاع جانبی آن برابر b و c $(b < c)$ و نسبت زوایای مجاور به قاعده بزرگتر عبارت از $2:1$ است. طول قاعده کوچکتر ذوزنقه را محاسبه کنید.

۸۷ ● اقطار AC و BD از ذوزنقه $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ در نقطه O همدیگر را قطع می‌کنند و زاویه AOD از آن برابر $60°$ است. ثابت کنید که نقاط K ، M و P که بترتیب میانگاه پاره‌خط های AO ، BO و CD هستند رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌باشند.

۸۸ ● ثابت کنید که مجموع مربعات اقطار یک ذوزنقه با دو برابر حاصلضرب قاعده ها به اضافه مجموع مربعات اضلاع جانبی ذوزنقه برابر است.

۸۹ ● ثابت کنید که اگر نقطه تلاقی امتداد اضلاع جانبی ذوزنقه را به نقطه تلاقی اقطار آن وصل کنیم خط حاصل قاعده های ذوزنقه را نصف می‌کند.

۹۰ ● در ذوزنقه ای با قاعده های a و b خطی از نقطه تلاقی اقطار به موازات قاعده ها رسم می‌کنیم. طول قطعه ای از این خط را که بین اضلاع جانبی ذوزنقه محصور است بدست آورید.

۹۱ ● در ذوزنقه $ABCD$ ، هریک از قاعده های AD و BC را در هردو جهت امتداد می‌دهیم. نیمساز زوایای خارجی A و B در نقطه K و نیمساز زوایای خارجی C و D در نقطه E همدیگر را قطع می‌کنند. محیط ذوزنقه را با توجه به $KE = 20$ cm بدست آورید.

۹۲ ● از نقطه O محل تلاقی اقطار متعامد ذوزنقه $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ خط MK را عمود بر ضلع CD رسم می‌کنیم (نقطه M روی AB و نقطه K روی CD قرار دارد). اگر $AD=40$ cm و $BC=30$ cm باشد آنگاه MK را پیدا کنید.

۶ • مسائل گوناگون

۹۳ • در چهارضلعی $ABCD$ نقاط P، K، E و M بترتیب میانگاه اضلاع AB، BC، CD و AD هستند. ثابت کنید که چهارضلعی $PKEM$ یک متوازی الاضلاع است.

۹۴ • روی اضلاع زاویه قائمه AC و BC از مثلث قائم الزاویه ABC مربعات $ADKC$ و $CEMB$ را رسم می‌کنیم. عمودهای DH و MP را از نقاط D و M بر امتداد وتر AB وارد می‌کنیم. ثابت کنید که:
$DH + MP = AB$

۹۵ • بر روی اضلاع یک متوازی الاضلاع و بیرون آن چهار مربع رسم می‌کنیم. ثابت کنید اگر مرکز این مربعات را به ترتیب بهم وصل کنیم چهارضلعی حاصل نیز یک مربع خواهد بود.

۹۶ • در درون مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه a و b مربعی را محاط کرده ایم که با مثلث در یک زاویه قائمه مشترک است. محیط مربع را بدست آورید.

۹۷ • در یک مثلث قائم الزاویه، لوزی ای را طوری محاط کرده ایم که همهٔ رئوس آن روی اضلاع مثلث واقع بوده و آنها در یک زاویهٔ 60 درجه ای باهم مشترک هستند. اگر طول هریک از اضلاع لوزی 6cm باشد طول اضلاع مثلث را بیابید.

۹۸ • یک لوزی را در درون مثلثی طوری محاط کرده ایم که در یک زاویه مشترک بوده وزاویه مقابل به این زاویه لوزی، ضلع مثلث را به پاره‌خط هایی با نسبت 2:3 تقسیم می‌کند. طول اضلاع مثلث را که اضلاع زاویه مشترک بین لوزی و مثلث محسوب می‌شوند پیدا کنید با این شرط که اقطار لوزی برابر m و n باشند.

۹۹ • در مثلثی با اضلاع جانبی 9 cm و 15cm متوازی الاضلاعی را طوری محاط کرده ایم که یکی از اضلاع آن به طول 6 cm روی قاعده مثلث قرار داشته و اقطار آن موازی اضلاع جانبی مثلث است. طول اضلاع دیگر متوازی الاضلاع و نیز طول قاعده مثلث را بدست آورید.

۱۰۰ • در داخل مربع $ABCD$ مثلث AKM را طوری محاط کرده ایم که نقطه K روی ضلع BC و نقطه M روی ضلع CD قرار گرفته و $AM=AK$ است. اگر $\angle AKM=3$ باشد در آنصورت اندازه زاویه MAD را بدست آورید.

۱۰۱ • در داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC، مثلث متساوی الاضلاع DEK را طوری محاط کرده‌ایم که نقطه D روی ضلع BC، نقطه E روی ضلع AC و نقطه K روی ضلع AB قرار دارد. اگر $\angle DEC = \alpha$ باشد نسبت $AB:DE$ را بدست آورید.

۱۰۲ • در یک چهارضلعی محدب میانگاه های اضلاع روبرو را دوبدو بهم وصل می‌کنیم و همچنین میانگاه های اقطار این متوازی الاضلاع را بهم متصل می‌کنیم. ثابت کنید که این خطوط در یک نقطه همدیگر را قطع کرده و نقطه مزبور میانگاه آنها محسوب می‌شود.

۱۰۳ • ثابت کنید که در یک چهارضلعی محدب، میانگاههای اقطار و میانگاههای خطوطی که

میانگاههای اضلاع مقابل آن را بهم وصل می‌کنند بر روی یک خط مستقیم قرار دارند.

۱۰۴ • اگر در یک چهارضلعی مجموع مربعات دوضلع روبرو با مجموع مربعات دوضلع دیگر برابر باشد آنگاه ثابت کنید که اقطار این چهارضلعی بر هم عمود هستند.

۱۰۵ • ثابت کنید اگر در یک متوازی الاضلاع خط واصل میانگاههای دوضلع مقابل با نصف مجموع دوضلع دیگر برابر باشد آنگاه چهارضلعی مزبور یک ذوزنقه خواهد بود.

۱۰۶ • قاعده های دو مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع a و $3a$ روی دوطرف یک خط مستقیم قرار دارند. فاصله دو رأس از قاعده ها که دورترین آنها از همدیگر محسوب می‌شوند معادل $2a$ است. فاصله رئوس دومثلث را که روی خط مفروض قرار ندارند بدست آورید.

۱۰۷ • در چهارضلعی $ABCD$، $\angle A = \angle D = 60°,\ AB = \sqrt{3},\ BC = 3$ و $CD = 2\sqrt{3}$ را داریم. زوایای B و C را بدست آورید.

۱۰۸ • اقطار چهارضلعی محدب $ABCD$ در نقطه O با زوایای قائمه همدیگر را قطع می‌کنند و $BO = CO = 1\ \text{cm}$، $AO = 8\ \text{cm}$ و $DO = 7\ \text{cm}$ است. امتداد اضلاع AB و CD همدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند. زاویه AMD را بدست آورید.

۱۰۹ • در چهارضلعی $ABCD$ ، B زاویه قائمه بوده و $AB:BD = 2:4\sqrt{2}$ است. امتدادهای اضلاع BC و AD همدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند. با شرط $\angle ABD = 45°$ اندازه زاویه DMC را بدست آورید.

۱۱۰ • در داخل مستطیل $ABCD$ مثلث AEK را طوری محاط کرده ایم که نقطه E روی BC و نقطه K روی CD قرار دارد. اگر $m = \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{CE} = \frac{CK}{DK}$ باشد آنگاه تانژانت زاویه $\angle EAK$ را بدست آورید.

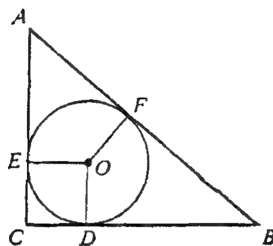
بخش ۳ • دایره ها

مثال ۱ • اگر a و b اضلاع زاویه قائمه یک مثلث قائم الزاویه و c طول وتر و r شعاع دایره محاطی آن باشد آنگاه ثابت کنید که: $\frac{a+b-c}{2}$

حل • خطوط کمکی زیر را که لازم هستند رسم می‌کنیم: از نقطه O مرکز دایره محاطی شعاع های OD، OE و OF را به نقاط تماس وصل می‌کنیم. آنگاه $OE \perp AC$, $OD \perp BC$ و $OF \perp AB$ خواهد بود (شکل ٤٤).

از آنجا که $ODCE$ یک مربع است (همهٔ زوایای آن قائمه بوده و $OE = OD$ است) از اینرو $BD = a - r$, $CE = CD = r$ و $AE = b - r$ را داریم. ولی $BD = BF$ و $AE = AF$ (طبق قضیه ۱۲b) بوده و از اینرو $BF = a - r$ و $AF = b - r$ خواهد بود. بدلیل $AB = BF + AF$ یعنی $c = (a - r) + (b - r)$ به $r = \frac{a+b-c}{2}$ وصول می یابیم.

توجه: فرمول حاصله را می‌توان در مورد مسائل مربوط به مثلث های قائم الزاویه مورد استفاده قرار داد.



شکل ٤٤

مثال ۲ ● دایره‌ای در درون مثلثی با محیط $18\,\mathrm{cm}$ محاط شده است. خطی بر این دایره به موازات قاعده مثلث مماس می‌کنیم. طولی از این خط که بین دوضلع جانبی مثلث محدود شده است برابر $2\mathrm{cm}$ می‌باشد. طول قاعده مثلث را بدست آورید.

حل ● M، P و N را نقاط تماس دایره و مثلث درنظر می‌گیریم (شکل ٤٥). آنگاه $AM=AN$، $CN=CP$ و $BP=BM$ خواهد بود (قضیه ۱۲b). با منظور کردن $CN=CP=y$ ، $AN=AM=x$ و $BP=BM=z$ محیط مثلث برابر $2x+2y+2z$ بوده ودرنتیجه $x+y+z=9$ خواهد بود.

مماس DE بر دایره را به موازات AC رسم می‌کنیم. آنگاه مثلث های ABC و DBE متشابه بوده و بنابراین نسبت اضلاع آنها با نسبت محیط ها برابر خواهد بود: $\frac{DE}{AC}=\frac{P_{DBE}}{P_{ABC}}$ ؛ یعنی چنین خواهیم داشت:

$$\frac{2}{x+y}=\frac{P_{DBE}}{18} \qquad (1)$$

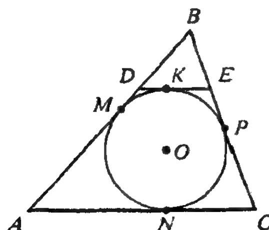
بطوریکه در آن داریم.

$$P_{DBE}=BD+BE+DE=BD+BE+(DK+KE)=BD+BE+(DM+EP)$$

(در اینجا از تساوی های $DM=DK$ و $KE=EP$ استفاده شده است).

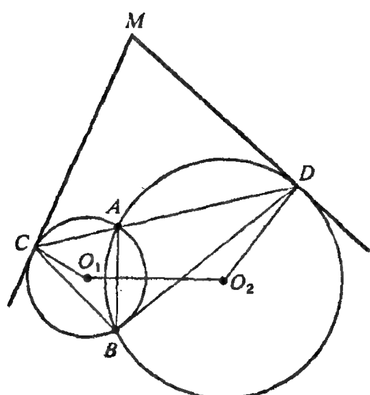
از اینرو $P_{DBE}=(BD+DM)+(BE+EP)=BM+BP=2z$ بوده و تساوی (1) را می‌توان بصورت $\frac{2}{x+y}=\frac{2z}{18}$ باز نوشت.

بدین ترتیب دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{2}{x+y}=\frac{z}{9} \end{cases}$ بدست می‌آید. با منظور کردن $x+y=b$ به $\begin{cases} b+z=9 \\ bz=18 \end{cases}$ وصول می‌یابیم که از آن نیز $b=3\ \mathrm{cm}$ یا $b=6\ \mathrm{cm}$ بدست می‌آید.



شکل ٤٥

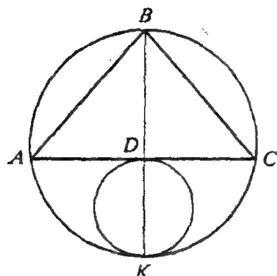
مثال ۳ ● از نقطه A مربوط به وتر مشترک AB بین دو دایره، خط مستقیمی رسم می‌کنیم. این خط دایره اول را در C و دایره دوم را در D قطع می‌کند. خط مماس بر دایره اول در نقطه C وخط مماس بر دایره دوم در نقطه D، همدیگر را در M قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقاط M، C، B و D روی یک دایره قرار دارند (شکل ٤٦).



شکل ٤٦

حل ● کافی است که $\angle CMD + \angle CBD = 180^\circ$ (قضیه ۱۵a) را ثابت کنیم. چنین داریم:
$\angle CBA = \frac{1}{2} \cup AC$ (زاویه محاطی) و $\angle MCA = \frac{1}{2} \cup AC$ (زاویه ظلّی).
از اینرو $\angle MCA = \angle CBA$ بوده و بطریق مشابه $\angle ADM = \angle ABD$ ثابت می‌گردد. از مثلث MCD نتیجه می‌گیریم که $\angle CMD + \angle MCD + \angle MDC = 180^\circ$ است.
$\angle MCD + \angle MDC = \angle CBA + \angle ABD = \angle CBD$ را نیز داریم.
از اینرو $\angle CMD + \angle CBD = 180^\circ$ استنتاج می‌شود که مطلوب مسئله بود.

مثال ٤ ● در دایره‌ای مثلث متساوی الساقین ABC محاط شده است که طول قاعدهٔ آن $AC=b$ و اندازه زوایای مجاور به قاعده در آن برابر α است. دایره دیگری را بر قاعده مثلث و دایره اول مماس می‌کنیم. نقطه تماس این دایره با مثلث بر میانگاه قاعدهٔ آن یعنی نقطه D منطبق است. شعاع دایره دوم را محاسبه کنید (شکل ٤٧).



شکل ٤٧

حل ● از تساوی $AD \cdot DC = BD \cdot DK$ (قضیه ۱٦a) استفاده می‌کنیم.
بدلیل $AD = DC = \frac{b}{2}$ ، $BD = \frac{b}{2} \tan\alpha$ و $DK = 2r$ به $\frac{b^2}{4} = \frac{b}{2} \tan\alpha \cdot 2r$ وصول می‌یابیم که از آن نیز $r = \frac{b}{4} \cot\alpha$ نتیجه می‌شود.

مثال ۵ ● دایره‌ای به شعاع R را از دو رأس مجاور مربعی عبور داده‌ایم. از رأس سوم مربع مماسی را بر دایره رسم کرده‌ایم. طول این مماس دو برابر ضلع مربع است. طول ضلع مربع را بدست آورید.

حل ● بعد از منظور کردن $AB=x$ و $BM=2x$ (شکل ٤٨) پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه K قطع کند. آنگاه $BK \cdot AB = BM^2$ (قضیه ۱٦c) یعنی $BK \cdot x = 4x^2$ را خواهیم داشت که از آن نیز $BK = 4x$ و درنتیجه $AK = 3x$ استنتاج می‌شود. زاویه KAD معادل 90° بوده و درنتیجه KD قطر

دایره خواهد بود. از مثلث قائم الزاویه ADK به تساوی $AD^2 + AK^2 = KD^2$ یعنی $x^2 + 9x^2 = 4R^2$ وصول می‌یابیم که از آن نیز $x = \frac{R\sqrt{10}}{5}$ حاصل می‌شود.

شکل ۴۸

مثال ۶ • قطاع قائم الزاویه‌ای از یک دایره مفروض است. به شعاع همین دایره و به مرکز واقع در نقطهٔ انتهایی کمان قطاع، دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره، قطاع مفروض را به دو مثلث خمیده تقسیم می‌کند. دایره‌ای را در مثلث کوچک محاط می‌کنیم. شعاع دایره محاطی و قطاع دایره را پیدا کنید.

شکل ۴۹

حل • تمام خطوطی را که به هنگام بحث در مورد دو دایره مماس داخلی یا خارجی، و یا خط مماس بر یک دایره ضروری هستند، رسم می‌کنیم: O_2O_3 عبارت از خط المرکزین، B عبارت از نقطه تماس، O_1O_3 عبارت از خط المرکزین، A' نقطه تماس، O_3C عمود بر O_1C، و C نقطه تماس است (شکل ۴۹).

تساوی $O_1O_2 = R$ (پارامتر کمکی) را منظور کرده و r، شعاع دایره محاطی را برحسب R بیان می‌کنیم، مثلث $O_1O_2O_3$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. $O_1O_2 = R,\ O_1O_3 = R - r$ و $O_2O_3 = R + r$ را داریم. اگر ارتفاع O_3H را رسم کنیم آنگاه $O_1H = O_3C = r$ و $O_2H = R - r$ خواهد بود. O_3H را به عنوان عنصر مرجع اختیار می‌کنیم.

از مثلث O_1O_3H به $O_3H^2 = O_1O_3^2 - O_1H^2 = (R - r)^2 - r^2$ وصول می‌یابیم. از مثلث O_3HO_2 نیز $O_3H^2 = O_2O_3^2 - O_2H^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$ استنتاج می‌شود. بدین ترتیب $(R - r)^2 - r^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$ را خواهیم داشت که از آن نیز $r = \frac{R}{6}$ حاصل شده و درنتیجه $\frac{r}{R} = \frac{1}{6}$ خواهد بود.

مثال ۷ • دو دایره به شعاع های r و R در خارج هم، مماس بوده و AB و CD مماس های مشترک خارجی آنها هستند. ثابت کنید که در چهارضلعی $ABCD$ می‌توان یک دایره را محاط کرد. شعاع این دایره را پیدا کنید (شکل ۵۰).

شکل ۵۰

حل ● همه ترسیمات کمکی ضروری را انجام می‌دهیم. خطوط مماس را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کرده و خط المرکزین OO_1O_2 را رسم می‌کنیم. سپس شعاع های O_1D و O_2C را بر نقاط تماس رسم می‌کنیم: $O_1D \perp CD$ و $O_2C \perp CD$. از آنجا که خط المرکزین محور تقارن شکل محسوب می‌شود از این رو نقاط A و D و نقاط B و C نسبت به محور OO_2 دو بدو متقارن خواهند بود. این نکته بدین معنی است که $ABCD$ ذوزنقه متساوی الساقین است. برای محاط کردن دایره‌ای در دوزنقه $ABCD$ لازم و کافی است که تساوی $AD + BC = AB + CD$ (قضیه ۱۶b) یا بدلیل $AB = CD$ تساوی $AB = \frac{AD+BC}{2}$ متقاعد شود. از اینرو کافی است که ثابت کنیم پاره‌خط AB میانه ذوزنقه مزبور به حساب می‌آید. اگر مماس مشترک داخلی KP را رسم کنیم آنگاه:

$AK = KM$، $BK = KM$، $DP = PM$ و $CP = PM$ (قضیه ۱۲b) خواهد بود که به این معنی است که KP میانه ذوزنقه $ABCD$ بوده و $KP = AB$ است. بدین ترتیب می‌توان در ذوزنقه دایره‌ای را محاط کرد که EF قطر آن باشد. اگر $O_1E = x$ و $O_2F = y$ را منظور کنیم آنگاه از تساوی $MF = ME$ (میانه KP پاره‌خط EF را نصف می‌کند) نتیجه می‌شود که $R - y = r + x$ است. از تشابه مثلث های O_1DE و O_2CF به $\frac{O_1D}{O_2C} = \frac{O_1E}{O_2F}$ یعنی $\frac{r}{R} = \frac{x}{y}$ وصول می‌یابیم.

از دستگاه معادلات $\begin{cases} R - y = r + x \\ \frac{x}{y} = \frac{r}{R} \end{cases}$ درمی‌یابیم که $y = \frac{R^2 - rR}{R - r}$ بوده و آنگاه شعاع دایره محاطی برابر $R - y = \frac{2Rr}{R+r}$ خواهد بود.

مثال ۸ ● زاویه حاده‌ای از مثلث قائم الزاویه برابر α است. اگر شعاع دایره مماس بر وتر و امتداد اضلاع قائمه این مثلث برابر R باشد در آنصورت طول وتر مثلث مفروض را بدست آورید (شکل ۵۱).

شکل ۵۱

حل ● بدلیل $AB=AK+BK$ مسئله به محاسبه پاره‌خط های AK (از $\triangle AOK$) و BK (از $\triangle OBK$) تحویل می‌یابد. مثلث AOK را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. بدلیل $\angle KOF = \angle BAC = \alpha$ (به عنوان زوایایی که اضلاع آنها بر هم عمود هستند) چنین داریم: ($\triangle KOA=\triangle AOF$) $\angle KOA=\frac{\alpha}{2}$. از اینرو $AK = OK \tan\frac{\alpha}{2}= R\tan\frac{\alpha}{2}$ حاصل می‌شود. مثلث BOK را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. چنین داریم: $\angle BOK=\frac{1}{2}\angle DOK=\frac{1}{2}(90^\circ-\angle KOF)=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$. (در اینجا از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که در چهارضلعی $ODCF$ سه زاویه D، C و F قائمه بوده و از اینرو زاویه چهارم یعنی زاویه DOF نیز قائمه خواهد بود). آنگاه چنین خواهیم داشت:

$$BK=OK\tan\angle BOK=R\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$AB=AK+BK=R\tan\frac{\alpha}{2}+R\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=R\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

(در اینجا فرمول $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ بکار گرفته شده است).

مثال ۹ ● مثلث حادة‌الزاویه ABC با زوایای $\angle A=\alpha$ و $\angle B=\beta$، $\angle C=\gamma$ مفروض است (شکل ۵۲). ارتفاع مرسوم از رأس A توسط مرکز ارتفاعی مثلث به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

شکل ۵۲

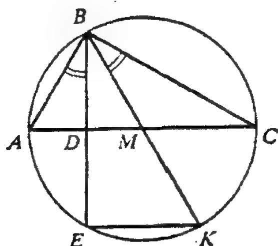
حل ● دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده و شعاع آن را با R (پارامتر کمکی) نشان می‌دهیم. سپس OP را بر BC عمود کرده و از تساوی $AH=2OP$ (مثال ۸ بخش ۲ را نگاه کنید) استفاده می‌کنیم که در آن H مرکز ارتفاعی است. مثلث OPB را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. از آنجا که اندازه زاویه KOB با کمان BK اندازه گرفته می‌شود و $\cup BK=\frac{1}{2}\cup BC$ بوده و زاویه CAB برابر نصف کمان BC است از اینرو چنین داریم: $\angle KOB=\angle CAB=\alpha$. آنگاه $OP=R\cos\alpha$ بوده و بنابراین $AH=2R\cos\alpha$ خواهد بود. طبق قانون سینوس ها $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$ (قضیه ۸) بوده و از اینرو $AC=2R\sin\beta$ را خواهیم داشت. آنگاه از $\triangle ACD$ درمی‌یابیم که $AD=AC\sin\angle ACB=2R\sin\beta\sin\gamma$ بوده و درنتیجه چنین داریم: $AH=2R\cos\alpha$ و

$$HD=AD-AH=2R\sin\beta\sin\gamma-2R\cos\alpha=2R(\sin\beta\sin\gamma-\cos(180^\circ-(\beta+\gamma)))=2R(\sin\beta\sin\gamma+\cos(\beta+\gamma))=2R(\sin\beta\sin\gamma\times\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\times\sin\gamma)=2R\cos\beta\cos\gamma$$

بدین ترتیب تساوی زیر استنتاج می‌شود:

$$\frac{AH}{HD}=\frac{2R\cos\alpha}{2R\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

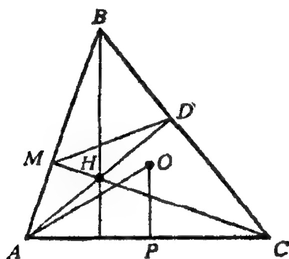
مثال ۱۰ ● ثابت کنید که اگر در یک مثلث غیر متساوی الساقین ارتفاع و میانه مرسوم از یک رأس واقع در درون مثلث با اضلاع جانبی آن زوایای متساوی تشکیل دهند آنگاه این مثلث، قائم الزاویه خواهد بود.



شکل ۵۳

حل ● دایره‌ای را بر مثلث مفروض ABC محیط کرده، ارتفاع BD و میانه BM را امتداد می‌دهیم تا دایره را بترتیب در نقاط E و K قطع کنند (شکل ۵۳). بدلیل $\angle ABE=\angle KBC$ به $\cup AE=\cup KC$ وصول یافته و وترهای AC و EK که کمان‌های مساوی را بین خود محصور کرده‌اند باهم مساوی خواهند بود. ولی $\angle BDM=90^\circ$ را داریم که بنابرآن $\angle BEK=90^\circ$ بوده و از اینرو BK قطر دایره خواهد بود. بدلیل اینکه مرکز دایره محیطی از یک طرف روی قطر BK و از طرف دیگر روی عمود مرسوم از M بر AC قرار دارد، از اینرو خود نقطه M مرکز دایره خواهد بود. بنابراین AC قطر دایره بوده و درنتیجه $\angle ABC=90^\circ$ خواهد بود.

مثال ۱۱ ● در مثلث حادة الزاویه ABC، AD و CM ارتفاعات آن بوده، محیط مثلث MBD برابر 15cm، محیط مثلث MBD برابر 9cm و شعاع دایره محیط بر مثلث MBD نیز معادل 1.8 cm است. طول AC را محاسبه کنید (شکل ۵۴).



شکل ۵۴

حل ● قبل از هرچیزی ثابت می‌کنیم که مثلث‌های ABC و MBD متشابه هستند. درحقیقت مثلث‌های ABD و MBC قائم الزاویه بوده و هردو در زاویه حاده B مشترک هستند. از اینرو آنها باهم متشابه بوده و درنتیجه $\frac{BD}{BM}=\frac{AB}{BC}$ خواهد بود. آنگاه در مثلث‌های ABC و MBD با زاویهٔ مشترک B

اضلاع این زاویه متناسب بوده و درنتیجه مثلث های مزبور متشابه خواهند بود. حال از این نکته استفاده می‌کنیم که در مثلث های متشابه، نسبت محیط ها و نسبت شعاع های دایره های محیطی با نسبت تشابه آنها برابر است. طبق فرض $P_{ABC}=15$ cm و $P_{MBD}=9$cm بوده و از اینرو نسبت تشابه برابر $\frac{5}{3}$ خواهد بود. بدلیل اینکه شعاع دایره محیط بر مثلث MBD برابر 1.8 cm است از اینرو درمی یابیم که شعاع دایره محیط بر مثلث ABC برابر $1.8\cdot\frac{5}{3}=3$cm خواهد بود. اگر O را مرکز دایره محیط بر مثلث ABC و OP را عمود بر AC در نظر بگیریم، آنگاه $BH=2OP$ (به قضیه ۸ بخش ۲ مراجعه کنید) خواهد بود. ولی BH قطر دایره محیط بر مثلث MBD (بدلیل اینکه زاویه BDH برابر $90°$ است) بوده و از اینرو $BH=3.6$cm و درنتیجه $OP=1.8$ cm خواهد بود. حال در مثلث قائم الزاویه AOP دوضلع یعنی $AO=3$ (شعاع دایره محیطی) و $OP=AO=3$cm معلوم است.

آنگاه $AP=\sqrt{9-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{12}{5}$ cm ودرنتیجه $AC=4.8$ cm خواهد بود.

مسائل

۱ • دایره‌ها

۱۱۱ • دو دایره در نقطه A بریکدیگر مماس خارجی بوده و BC خط مماس مشترک آنهاست. ثابت کنید که: $\angle BAC=90°$

۱۱۲ • دو دایره در نقاط A و B متقاطع هستند. خط l دایره ها را درنقاط C، D، E و M قطع می‌کند. نقاط A و B در طرفین این خط قرار دارند. ثابت کنید که مجموع زوایای DBE و CAM برابر $180°$ است.

۱۱۳ • دو دایره همدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. دو خط l_1 و l_2 موازی بوده، l_1 از نقطه A عبور کرده و دایره ها را در نقاط E و K قطع می‌کند. خط l_2 نیز از نقطه B عبور کرده و دایره ها را در M و P قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی $EKMP$ متوازی الاضلاع است.

۱۱٤ • بر دایره‌ای به مرکز O از نقطه M دو خط مماس MA و MB را رسم می‌کنیم. خط مستقیم l بر دایره در نقطه C مماس شده و MA و MB را بترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. ثابت کنید که: (a) محیط مثلث MDE از انتخاب نقطه C مستقل است؛ (b) اندازه زاویه DOE به انتخاب نقطه C وابسته نیست.

۱۱۵ • نقاط A، B، C و D دایره‌ای را به نسبت 1:3:5:6 تقسیم می‌کنند. زاویه بین مماس های مرسوم بر دایره در نقاط A، B، C و D را پیدا کنید.

۱۱٦ • دو دایره مساوی با یک دایره دوبدو مماس هستند. شعاع دایره سوم برابر 8 cm است. طول خط واصل نقاط تماس دایره سوم با دو دایره مساوی برابر 12 cm است. شعاع دایره های مساوی را بیابید.

۱۱۷ • وتر مشترک دو دایره متقاطع به طول a نقش یک ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط دریکی از

دایره ها و نیز نقش یک ضلع مربع محاط در دایره دیگر را ایفاء می‌کند. طول خط المرکزین دو دایره را بدست آورید.

۱۱۸ • دو دایره با شعاع های r و R بر هم مماس خارجی هستند. طول مماس مشترک خارجی آنها را بدست آورید.

۱۱۹ • دو دایره با شعاع r و R بر هم مماس خارجی هستند. خط دایره ها را در نقاط A، B، C و D با شرط $AB = BC = CD$ قطع می‌کند. طول AD را پیدا کنید.

۱۲۰ • دو دایره که نسبت شعاع های آنها $1:3$ است بر هم مماس خارجی بوده و طول مماس مشترک خارجی آنها برابر $6\sqrt{3}\,\text{cm}$ است. محیط شکل حاصل از مماسهای خارجی وکمان های واقع در خارج مماس ها را بدست آورید.

۱۲۱ • از نقطه ای قاطعی را بر دایره ای رسم می‌کنیم که طول آن $48\,\text{cm}$ است. از همین نقطه مماسی بر دایره رسم می‌کنیم که طول آن $\frac{2}{3}$ برابر طولی از خط قاطع است که در داخل دایره قرار دارد. اگر فاصله قاطع از مرکز دایره $24\,\text{cm}$ باشد در آنصورت شعاع دایره را پیدا کنید.

۱۲۲ • مماس مشترک دو دایره مماس خارجی با خط المرکزین دایره ها زاویه ای برابر α درست می‌کند. نسبت شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

۱۲۳ • از نقطه A واقع در خارج دایره ای به مرکز O دو قاطع ABC و AMK را رسم می‌کنیم. نقاط B و M محل تلاقی قاطع ها و دایره از دو نقطه دیگر محل تلاقی آنها به نقطه A نزدیکتراند. اگر $\angle CAO = \alpha$، $AC = a$، $\angle COK = \beta$ بوده و قاطع AMK از مرکز دایره بگذرد در آنصورت BC را بیابید.

۱۲۴ • دو دایره همدیگر را در نقاط A و B قطع کرده اند. از نقطه A دو پاره‌خط AC و AD را رسم می‌کنیم که هریک از آنها وتری از یک دایره بوده و بر دایره دیگر نیز مماس هستند. ثابت کنید که:

$$AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$$

۱۲۵ • در دایره ای به شعاع R، دو وتر AB و CD بر هم عمود هستند. ثابت کنید که: $AC^2 + BD^2 = 4R^2$

۱۲۶ • ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل نقطه M واقع بر روی قطر یک دایره از نقاط انتهایی تمام وترهای موازی با آن قطر در دایره، یک مقدار ثابت است.

۱۲۷ • دو دایره در نقطه C بر یکدیگر مماس خارجی بوده و AB مماس مشترک آنهاست اگر $AC = 8\,\text{cm}$ و $BC = 6\,\text{cm}$ باشد شعاع دایره ها را بیابید.

۱۲۸ • دو دایره با شعاع های R و $\frac{R}{2}$ بر هم مماس خارجی هستند. از مرکز دایره کوچکتر پاره‌خطی به طول $2R$ و با زاویه $30°$ با خط المرکزین رسم می‌کنیم. طول قسمتهایی از این پاره‌خط را بیابید که در خارج دو دایره قرار دارند.

۱۲۹ • دو دایره با شعاع های a و b $(a < b)$ بر هم مماس داخلی بوده و مرکز دایره بزرگتر در خارج دایره

کوچکتر قرار دارد. وتر AB از دایره بزرگتر بر دایره کوچکتر مماس بوده و با مماس مشترک آنها زاویه α درست می‌کند. AB را بیابید.

۲ • مثلث های محاطی ومحیطی

۱۳۰ • روی اضلاع AB و AC از مثلث متساوی الاضلاع ABC نقاط M و K را طوری انتخاب کرده ایم که $AM:MB = 2:1$ و $AK:KC = 1:2$ است. ثابت کنید که پاره‌خط KM با شعاع دایره محیط بر مثلث ABC برابر است.

۱۳۱ • دایره‌ای را بر مثلث ABC $(AB = BC)$ محیط کرده ایم. امتداد نیمسازهای زوایای A و C دایره را در نقاط K و P و همدیگر را در E قطع می‌کنند. ثابت کنید که چهارضلعی $BKEP$ یک لوزی است.

۱۳۲ • در مثلث ABC ، AD و CE نیمساز زوایا هستند. دایره محیط بر مثلث BDE از مرکز دایره محاط در مثلث ABC می‌گذرد. ثابت کنید که: $\angle ABC = 60°$

۱۳۳ • ثابت کنید که مرکز محاط دریک مثلث در درون مثلث تشکیل شده بوسیله خطوط واصل میانگاه های اضلاع قرار دارد.

۱۳۴ • خط مستقیم l بر دایره محیطی مثلث ABC در نقطه C مماس است. ثابت کنید که مربع ارتفاع CH از مثلث ABC با حاصلضرب فواصل نقاط A و B از خط l برابر است.

۱۳۵ • اگر در مثلثی مراکز دایره های محاطی و محیطی نسبت به یکی از اضلاع آن متقارن باشد زوایای مثلث را بدست آورید.

۱۳۶ • قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر $2a$ و ارتفاع آن برابر h است. بر دایره محاطی مثلث خطی را به موازات قاعده مماس می‌کنیم. طولی از این پاره‌خط را که بین دوساق مثلث قرار دارد بدست آورید.

۱۳۷ • در مثلث قائم الزاویه ای، نقطه تماس دایره محاطی وتر آن را به پاره‌خط هایی به طول 24 cm و 36 cm تقسیم می‌کند. طول اضلاع زاویه قائمه را بدست آورید.

۱۳۸ • در مثلث قائم الزاویه ای طول یک ضلع زاویه برابر 48 cm وطول تصویر ضلع دیگر بر روی وتر معادل 3,92 cm است. محیط دایره محاطی مثلث را بدست آورید.

۱۳۹ • در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع زاویه قائمه با طول های 18 cm و 24 cm فاصله بین مراکز دایره های محاطی و محیطی را بدست آورید.

۱۴۰ • در مثلث متساوی الساقینی ارتفاع وارد بر قاعده برابر دوسوم شعاع دایره محیطی است. اندازه زاویه های مجاور به قاعده را محاسبه کنید.

۱۴۱ • در مثلثی با دوضلع به طول های a و b که اندازه زاویه بین آنها برابر γ است شعاع دایره محیطی را بدست آورید.

۱۴۲ ● در مثلث متساوی الساقینی طول قاعده برابر b و زاویه های مجاور به قاعده برابر α هستند. بر دایره محاطی مثلث مماسی را به موازات قاعده رسم می‌کنیم. طول قطعه ای از این پاره‌خط را که بین دو ساق مثلث واقع است محاسبه کنید.

۱۴۳ ● در مثلث متساوی الساقینی نسبت شعاع های دایره های محاطی و محیطی برابر k است. زاویه های مثلث را بدست آورید.

۱۴۴ ● ثابت کنید نامساوی زیر که در آن r شعاع دایره محاطی و h ارتفاع وارد بر وتر است در مورد هر مثلث قائم الزاویه برقرار است: $0.4 < \frac{r}{h} < 0.5$

۱۴۵ ● ثابت کنید که دایره محیطی یک مثلث با دایره مار بر دو رأس و مرکز ارتفاعی مثلث برابر است.

۱۴۶ ● مثلث متساوی الاضلاع ABC در دایره ای محاط شده است. روی کمان BC نقطه دلخواه M را اختیار کرده و وترهای AM، BM و CM را رسم می‌کنیم. تساوی $AM = BM + CM$ را ثابت کنید.

۱۴۷ ● ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل نقطه دلخواه از دایره ای تا رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع محاط در این دایره مقدار ثابتی است که مستقل از موقعیت نقطه است.

۱۴۸ ● مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ را در دایره ای محاط کرده ایم. روی کمان AB نقطه دلخواه K را اختیار کرده و آن را بوسیله وترهایی به رئوس مثلث وصل می‌کنیم. تساوی زیر را ثابت کنید. $AK \cdot KC = AB^2 - KB^2$

۱۴۹ ● در مثلث حادة الزاویه ای با اضلاع a، b و c از مرکز دایره محیطی بر اضلاع آن عمودهایی را رسم می‌کنیم. طول این عمودها بترتیب برابر m، n و p است. ثابت کنید که: $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=\frac{mnp}{abc}$

۱۵۰ ● ثابت کنید که پای عمودهای مرسوم از نقطه دلخواهی روی دایره محیطی یک مثلث بر اضلاع یا امتداد اضلاع آن روی یک خط مستقیم قرار دارد.

۱۵۱ ● در مثلثی، a و b طول دو ضلع از آن و l طول نیمساز زاویه بین این دو ضلع است. نیمساز مزبور ضلع سوم را به پاره‌خط هایی با طول های a' و b' تقسیم می‌کند. ثابت کنید که در این مثلث $l^2 = ab - a'b'$ است.

۱۵۲ ● شعاع دایره محیطی یک مثلث را به یکی از رئوس مثلث وصل می‌کنیم. ثابت کنید این خط بر خطی عمود است که پای عمودهای مرسوم از دو رأس دیگر را بهم وصل می‌کند.

۱۵۳ ● دایره ای را بر مثلث ABC محیط کرده ایم. از نقطه B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و این مماس ضلع CA را در نقطه D واقع در بیرون نقطه A قطع می‌کند. اگر $AB + AD = AC$ و $CD = 3$ و $\angle BAC = 60°$ باشد محیط مثلث را محاسبه کنید.

۱۵۴ ● مثلث متساوی الاضلاع ABC را در دایره ای به شعاع R محاط کرده ایم. وتر BD، ضلع AC را در نقطه E طوری قطع می‌کند که تناسب $AE:CE = 2:3$ برقرار می‌شود. طول CD را پیدا کنید.

۱۵۵ ● در ذوزنقه $ABCD$، نیمساز زاویه A قاعده BC (یا امتداد آن) را در نقطه E قطع می‌کند. دایره

محاطی مثلث ABE بر ضلع AB در نقطه M و بر ضلع BE در نقطه P مماس است. اگر $AB:MP = 2$ باشد در آنصورت زاویه BAD را پیدا کنید.

۱۵۶ • در مثلث قائم الزاویه ای دایره ای را محاط کرده ایم. نقطه تماس دایره با وتر مثلث آن را به دو قطعه تقسیم می‌کند که نسبت آنها برابر k $(k > 1)$ است. زاویه های مثلث را بدست آورید.

۱۵۷ • اگر در مثلث متساوی الساقینی مرکز ارتفاعی مثلث روی دایره محاطی قرار داشته باشد زاویه مجاور به قاعده را بیابید.

۳ • ترتیب های گوناگون از دایره و مثلث

۱۵۸ • پاره‌خط های AD ، BM و CP میانه های مثلث ABC هستند. دایره محیطی مثلث DMC از گرانیگاه مثلث ABC عبور می‌کند. ثابت کنید که: $\angle PCB = \angle ABM$ و $\angle PCA = \angle BAD$

۱۵۹ • نیمدایره ای داخل مثلث قائم الزاویه ای طوری محاط شده است که قطر آن روی وتر مثلث قرار گرفته و مرکز دایره وتر مثلث را به دو قطعه به طول های 15 cm و 20 cm تقسیم کرده است. شعاع نیمدایره را بیابید.

۱۶۰ • دایره ای از رأس A مثلث قائم الزاویه ABC عبور کرده و بر ضلع قائمه BC مماس می‌شود. مرکز آن نیز روی وتر AB از مثلث قرار می‌گیرد. اگر $AB = c$ و $BC = a$ باشد شعاع دایره را بیابید.

۱۶۱ • ضلع BC از مثلث قائم الزاویه ABC را به عنوان قطر دایره ای در نظر می‌گیریم. این دایره وتر AB از مثلث را در نقطه D طوری قطع می‌کند که $AD:DB = 3:1$ باشد. اگر ارتفاع وارد بر وتر مثلث برابر 3 cm باشد اضلاع مثلث ABC را بیابید.

۱۶۲ • دو ضلع از مثلثی برابر a و b بوده و زاویه بین آنها برابر $120°$ است. شعاع دایره مار بر انتهای ضلع سوم و مرکز دایره محاطی مثلث را بیابید.

۱۶۳ • دایره ای از رئوس A و B مثلث ABC عبور کرده و بر ضلع BC در نقطه B مماس می‌شود. ضلع AC بوسیله دایره به دو قطعه AM و MC طوری تقسیم می‌شود که $AM = MC + BC$ در می‌آید. اگر $AC = 4$ cm باشد در آنصورت BC را بیابید.

۱۶۴ • ضلع AB از مثلث ABC قطر دایره ای محسوب می‌شود که ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $CD = 2$ cm و $AB = BC = 6$ cm باشد در آنصورت AC را بیابید.

۱۶۵ • ضلع AB از مثلث ABC قطر دایره ای محسوب می‌شود که ضلع AC را در نقطه D و ضلع BC را در نقطه E قطع می‌کند. اگر $AB = 3$cm ، $AD:DC = 1:1$ و $BE:EC = 7:2$ باشد آنگاه AC و BC را بدست آورید.

۱۶۶ • پاره‌خط BD ارتفاعی از مثلث ABC و DE میانه مثلث BCD است. دایره محاط در مثلث BDE بر ضلع BE در نقطه K و بر ضلع DE در نقطه M مماس است. اگر $AB = BC = 8$ cm و

$KM=2$ cm باشد زوایای مثلث مفروض را بدست آورید.

۱۶۷ ● در مثلث ABC ارتفاع AD و دایره‌ای به شعاع AD و مرکز A رسم می‌کنیم. اگر $\beta=\angle B$، $BC=a$ و $\gamma=\angle C$ باشد طول کمانی از این دایره را پیدا کنید که در داخل مثلث قرار دارد.

۱۶۸ ● ثابت کنید که شعاع دایره مماس بر وتر مثلث قائم‌الزاویه و امتدادهای اضلاع آن با مجموع طول های وتر و شعاع دایره محاطی مثلث برابر است.

۱۶۹ ● نیمسازهای AD و CK از مثلث ABC در نقطه O همدیگر را قطع کرده‌اند و $KD=1$cm است. اگر نقطه B روی دایره محیطی مثلث KDO قرار داشته باشد زوایا و طول دو ضلع دیگر مثلث KDO را بدست آورید.

۱۷۰ ● دایره‌ای بر اضلاع AC و BC مثلث ABC مماس بوده و مرکز آن روی AB قرار دارد. اگر $BC=140$cm، $AC=48$cm و $AB=148$cm باشد آنگاه شعاع دایره مزبور را بدست آورید.

۱۷۱ ● در مثلث ABC، نقطه D میانگاه AC و E میانگاه ضلع BC است. دایره محیط بر مثلث CDE از گرانیگاه مثلث ABC عبور می‌کند. اگر $AB=c$ باشد آنگاه طول میانه CK را بدست آورید.

۱۷۲ ● اگر در مثلث ABC، رأس C، گرانیگاه M و میانگاه‌های اضلاع AC و BC روی یک دایره واقع باشند طول اضلاع a، b و c را بیابید..

۱۷۳ ● در مثلث متساوی‌الساقین ABC که اندازه زاویه B در آن برابر $120°$ است نیمدایره‌ای به شعاع $(3\sqrt{3}+\sqrt{21})$cm با مرکز واقع بر روی AC محاط شده است. بر نیمدایره مماسی رسم شده است که ساق های AB و BC مثلث را بترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر $DE=2\sqrt{7}$cm باشد BD و BE را بدست آورید.

۱۷۴ ● در مثلث ABC طول سه ضلع بصورت $AB=BC=39$cm، $AC=30$cm معلوم است. در این مثلث ارتفاعات AD و BE را رسم کرده‌ایم. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از نقاط D و E عبور کرده و بر ضلع BC مماس باشد.

۱۷۵ ● در مثلث ABC، ارتفاعات CD و AE را رسم کرده‌ایم. دایره‌ای بر مثلث BDE محیط شده است. اگر $AC=b$ و $\angle ABC=\beta$ باشد آنگاه طول کمانی از این دایره را پیدا کنید که در درون مثلث ABC قرار دارد.

۴ ● دایره و چهارضلعی

۱۷۶ ● ثابت کنید اگر ذوزنقه‌ای دارای یک دایره محیطی و یک دایره محاطی باشد آنگاه ارتفاع ذوزنقه یک واسطه هندسی بین قاعده‌های آن است.

۱۷۷ ● قاعده‌های ذوزنقه متساوی‌الساقینی برابر 21 cm و 9cm و ارتفاع آن برابر 8 cm است. شعاع دایره محیطی آن را بدست آورید.

۱۷۸ • قاعده‌های ذوزنقه متساوی الساقینی برابر a و b و اندازه زاویه های حاده آن برابر α است. شعاع دایره محیطی ذوزنقه را پیدا کنید.

۱۷۹ • دورأس مربعی روی دایره‌ای به شعاع R ودوضلع دیگر آن نیز روی خط مماس بر این دایره قرار دارند. طول ضلع مربع را بدست آورید.

۱۸۰ • اندازه زاویه های حاده لوزی $ABCD$ برابر αاست. نسبت شعاع دایره محاطی لوزی به شعاع دایره محاطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۸۱ • ذوزنقه متساوی الساقینی بر دایره‌ای محیط شده است. اگر نسبت ساق ذوزنقه بر قاعده کوچکتر آن برابر k باشد زوایای ذوزنقه را بدست آورید.

۱۸۲ • بر ذوزنقه ای با زوایای حاده α و β دایره‌ای محیط شده است. نسبت محیط ذوزنقه بر محیط دایره را بیابید.

۱۸۳ • (a) قضیه بطلمیوس را ثابت کنید: شرط لازم و کافی برای محاط شدن یک چهارضلعی محدب در یک دایره این است که مجموع حاصلضرب های اضلاع متقابل با حاصلضرب قطرها برابر باشد؛ به عبارت دیگر اگر طول اضلاع متقابل یک چهارضلعی محاط در دایره‌ای برابر a و b، c و m بوده و طول قطرهای آن d_1 و d_2 باشد آنگاه $ab+cm=d_1d_2$ خواهد بود. (b) با استفاده از قضیه بطلمیوس گزاره مسئله 146 را ثابت کنید.

۱۸۴ • دریک مثلث حادة الزاویه هر ارتفاعی را در قطعه ای از آن ضرب می‌کنیم که بین مرکز ارتفاعی و رأس مثلث واقع است. سپس درمورد هرسه ارتفاع مجموع این حاصلضرب ها را بدست می‌آوریم، ثابت کنید این حاصلجمع با نصف مجموع مربعات اضلاع برابر است.

۱۸۵ • روی وتر مثلث قائم الزاویه ای مربعی درخارج مثلث می‌سازیم ووتر یکی از اضلاع آن محسوب می‌شود. مرکز مربع را به رأس قائمه مثلث وصل می‌کنیم. اگر طول اضلاع زاویه قائمه مثلث 21 cm و 28 cm باشد خط مزبور وتر را به چه قطعاتی تقسیم می‌کند؟

۱۸۶ • دایره‌ای بر دوضلع مجاور مربعی مماس شده و هریک از دوضلع دیگر مربع را به قطعاتی به طول های 2 cm و 23 cm تقسیم می‌کند. شعاع دایره را پیدا کنید.

۱۸۷ • در لوزی $ABCD$ با ضلع 4 cm و با زاویه BAD مساوی $60°$ دایره‌ای محاط شده است. مماس مرسوم بر این دایره ضلع AB را در نقطه M وضلع AD را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $MP=2$ cm باشد MB و PD را بدست آورید.

۱۸۸ • نسبت شعاع دایره محیطی ذوزنقه ای به شعاع دایره محاطی آن برابر k است. زاویه حادهٔ ذوزنقه را بدست آورید.

۱۸۹ • بر چهارضلعی $ABCD$ که اقطار آنها در نقطه E بر هم عمود هستند دایره‌ای را محیط می‌کنیم. خط عمود بر AB از نقطه E ضلع CD را در نقطه M قطع می‌کند. اگر $AB=4$cm، $AD=8$cm و

$\angle CDB = \alpha$ باشد EM را بدست آورید.

۱۹۰ ● در درون دایره‌ای چهارضلعی $ABCD$ را محاط می‌کنیم که اقطار آن بر هم عمود بوده و در نقطه E همدیگر را قطع می‌کنند. خط مارّ از نقطه E و میانگاه ضلع CD، ضلع AB را در نقطه H قطع می‌کند. اگر $BE = 5\text{cm}$، $ED = 6\text{cm}$ و $\angle ADB = \alpha$ باشد HB را بدست آورید.

۱۹۱ ● در چهارضلعی محدب $ABCD$ ضلع AB برابر $\frac{25}{64}$، ضلع BC برابر $12\frac{25}{64}$ وضلع CD برابر $6\frac{1}{4}$ است. می‌دانیم که زاویه DAB حاده، زاویه ADC منفرجه، $\sin \angle DAB = \frac{3}{5}$ و $\cos \angle ABC = -\frac{63}{65}$ است. دایره‌ای با مرکز O بر اضلاع BC، CD و AD مماس است. طول پاره‌خط OC را پیدا کنید.

مسائل گوناگون

۱۹۲ ● از نقطه C دو مماس CA و CB را که زاویه بین آنها $60°$ است رسم می‌کنیم. در درون مثلث خمیده‌ای که با این دو مماس و کمان کوچک AB تشکیل می‌شود دایره‌ای را محاط می‌کنیم. ثابت کنید که طول این کمان با محیط دایره محاطی برابر است.

۱۹۳ ● یک مستطیل با طول و عرض $48\ \text{cm}$ و $36\ \text{cm}$ بوسیله قطر به دو مثلث تقسیم می‌شود. در هر یک از این مثلث ها دایره‌ای را محاط می‌کنیم. فاصله بین مراکز این دو دایره را بدست آورید.

۱۹۴ ● دو دایره با شعاعهای $16\ \text{cm}$ و $9\ \text{cm}$ بر هم مماس خارجی هستند. شعاع دایره محاط در داخل مثلث خمیده‌ای که با کمان هایی از دو دایره مزبور و مماس مشترک خارجی آنها بوجود می‌آید بدست آورید.

۱۹۵ ● وتری به طول $6\ \text{cm}$ دایره‌ای را به دو قسمت تقسیم می‌کند. مربعی با ضلع $2\ \text{cm}$ را در داخل قطعه کوچکتر محاط می‌کنیم. شعاع دایره را بیابید.

۱۹۶ ● دو دایره با شعاع R طوری مرتب شده‌اند که خط المرکزین آنها برابر R است. مربعی در قسمت مشترک دو دایره محاط شده است. طول ضلع مربع را بدست آورید.

۱۹۷ ● در داخل قطاع دایره‌ای با زاویه مرکزی 2α دایره‌ای محاط شده است. نسبت شعاع دایره محاطی بر شعاع قطاع را بیابید.

۱۹۸ ● در داخل قطاع AOB از دایره‌ای با شعاع R وزاویه مرکزی α مثلث متساوی الاضلاعی را محاط کرده‌ایم. یکی از رئوس این مثلث بر میانگاه کمان AB قرار دارد و دو رأس دیگر آن نیز روی شعاعهای OA و OB واقع است. طول ضلع مثلث را بدست آورید.

۱۹۹ ● کمانی از دایره‌ای به شعاع R به زاویه مرکزی 2α $(\alpha < \frac{\pi}{2})$ نگاه می‌کند. وتر این کمان دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند. در قسمت کوچکتر مربعی را محاط می‌کنیم. طول ضلع مربع را بدست آورید.

۲۰۰ • کمانی از دایره‌ای به شعاع R به زاویه مرکزی 2α $\left(\frac{\pi}{2} > \alpha\right)$ نگاه می‌کند. وتر این کمان دایره مزبور را به دو قسمت تقسیم می‌کند. در داخل قسمت کوچکتر مثلث متساوی الاضلاعی را طوری محاط کرده‌ایم که یک رأس آن بر میانگاه کمان و دو رأس دیگر روی وتر همین قطعه واقع شده است. طول ضلع مثلث را بیابید.

۲۰۱ • کمانی از دایره‌ای به شعاع R به زاویه مرکزی 2α $\left(\frac{\pi}{2} > \alpha\right)$ نگاه می‌کند. وتر این کمان دایره را به دو قطعه تقسیم می‌کند. در قطعه بزرگتر مثلث متساوی الاضلاعی را طوری محاط کرده‌ایم که یک رأس آن بر میانگاه وتر و دو رأس دیگر روی کمان واقع است. طول ضلع مثلث را بدست آورید.

۲۰۲ • دایره‌ای به شعاع a در داخل مثلث متساوی الساقینی محاط شده است. دایره‌ای به شعاع b را بر ساق‌های مثلث و دایره محاطی مماس کرده‌ایم. قاعده مثلث را بیابید.

۲۰۳ • نقطه B روی پاره‌خط AC با طول $12\ \text{cm}$ طوری انتخاب شده است که $AB = 4\text{cm}$ است. روی AC و AB به عنوان قطر دو دایره، دایره هایی را رسم کرده‌ایم. شعاع دایره مماس بر این دو دایره و پاره‌خط AC را بیابید.

۲۰۴ • قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر b وزاویه مجاور قاعده نیز برابر α است. دایره‌ای را در این مثلث محاط می‌کنیم. دایره‌ای را نیز بر این دایره و دو ساق مثلث مماس رسم می‌کنیم. شعاع دایره دوم را محاسبه کنید.

۲۰۵ • در دایره‌ای با شعاع R و مرکز O دو شعاع OA و OB را طوری رسم می‌کنیم که $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ $\angle AOB = \alpha$ باشد. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که بر کمان AB از قطاع OAB، وتر AB و نیمساز زاویه $A\hat{O}B$ مماس است.

۲۰۶ • دو دایره مساوی با شعاع a طوری در کنار هم قرار گرفته اند که طول خط المرکزین آنها برابر a است. مقطع این دو دایره با خط المرکزین به دو مثلث خمیده تقسیم می‌شود. در یکی از این مثلث ها دایره‌ای را محاط می‌کنیم. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که نقاط تماس دایره محاطی و دو دایره مفروض را بهم وصل می‌کند.

۲۰۷ • از نقطه A مماس AK را به دایره‌ای به شعاع $2\ \text{cm}$ و با مرکز O رسم می‌کنیم. پاره‌خط OA دایره را در نقطه M قطع می‌کند و با خط مماس زاویه $60°$ می‌سازد. شعاع دایره محاط در مثلث خمیده MKA را بیابید.

۲۰۸ • دایره‌ای به مرکز O و شعاع r $(a > r)$ مفروض است. از نقطه A واقع در فاصله a از مرکز دایره قاطعی را بر این دایره رسم می‌کنیم. این قاطع با قاطع AO زاویه $60°$ می‌سازد و دایره را در نقاط K و P قطع می‌کند (نقطه K بین A و P قرار می‌گیرد). اگر M نقطه تلاقی دایره و پاره‌خط AO باشد قطاع دایره محاط در مثلث خمیده MKA را پیدا کنید.

۲۰۹ ● طول قاعده مثلث متساوی الساقینی برابر b وزاویه مجاور به قاعده آن برابر α است. دایره ای را در این مثلث محاط می‌کنیم. دایرهٔ دیگری نیز بر این دایره، قاعده ویک ساق آن مماس می‌شود. شعاع دایره دوم را بیابید.

۲۱۰ ● دایره ای را بر مثلث متساوی الساقینی محاط کنیم که طول قاعده آن b وزاویه مجاور به قاعده آن برابر α است. دایره دیگری را بر این دایره وساق های مثلث محاط می‌کنیم. شعاع دایره دوم را بدست آورید.

۲۱۱ ● در درون قطعه ای از دایره ای با شعاع R وزاویه مرکزی α($\alpha < \pi$)دودایره مماس بر هم مساوی را محاط کرده ایم. شعاع آنها را بیابید.

۲۱۲ ● نقاط D ، K وM بترتیب روی اضلاع AB ، BC و AC از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید که دایره های محیطی مثلث هایADM ، BDK و CKM در یک نقطه متقارب هستند.

۲۱۳ ● از نقطه C دو مماس AC و BC را بر دایره ای به شعاع 12 cm وبا مرکز O رسم می‌کنیم. در مثلث ABC دایره‌ای را با مرکزO_1محاط می‌کنیم. این دایره بر اضلاع AC و BC در نقاط K و H مماس می‌شود. اگر فاصلهO_1 تا خط مستقیم KH برابر3cm باشد آنگاه زاویه AOB را بیابید.

۲۱۴ ● ازمرکزO دایره‌ای به‌شعاع دوشعاع OA و OB را با شرط $\angle AOB = \alpha$ $(\alpha < \pi)$ رسم می‌کنیم. دایره با وترAB به دوقطعه تقسیم می‌شود. درداخل قطعه کوچکتر مثلث متساوی الاضلاعی را محاط می‌کنیم بطوریکه یکی از اضلاع آن بر وتر AB عمود شود. طول ضلع مثلث را محاسبه کنید.

۲۱۵ ● در دایره ای به شعاع r قطر AB ووتر AC را رسم می‌کنیم. درداخل مثلث خمیده حاصل با ترسیمات فوق، دایره ای را محاط می‌کنیم. اگر $\angle CAB = \alpha$ باشد شعاع این دایره را بیابید.

۲۱۶ ● در دایره ای به مرکز O شعاع OM ووتر KP درنقطه A متقاطع بوده و $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ $\angle MAK=\alpha$ است. درداخل مثلث خمیده حاصل بطریق فوق دایره ای را محاط می‌کنیم. اگر $OM=r$ و $OA = a$ باشد شعاع این دایره را بیابید.

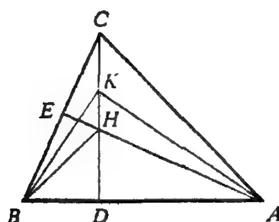
۲۱۷ ● از نقطه A واقع برروی دایره ای به شعاع r دووترAB و AC وقطرAD را رسم می‌کنیم. اگر $\angle BAC=\alpha$ ، $AB = b$ و $AB > AC$ باشد آنگاه شعاع دایره مماس بر کمان BC ووترهای AB و AC را پیدا کنید.

۲۱۸ ● روی یک ضلع زاویه ای به اندازه α دونقطه مفروض است که فاصله هریک ازآنها ازضلع دیگرزاویه برابر b و c $(b < c)$ است. شعاع دایره مارّ از این دو نقطه ومماس برضلع دیگرزاویه را پیدا کنید.

۲۱۹ ● اندازه زاویه AOB برابر α است. دایره‌ای برضلع AO درنقطه C مماس بوده وضلع OB را در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر $OC = a$ و $OD = b$ $(b > a)$ باشد آنگاه DE وشعاع دایره را پیدا کنید.

بخش ۴ • مساحت های اشکال مسطحه

مثال ۱ • نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. نقطه K را روی خط مستقیم CH طوری انتخاب می‌کنیم که ABK یک مثلث قائم الزاویه باشد. ثابت کنید که مساحت مثلث ABK واسطه هندسی بین مساحت های مثلث های ABC و ABH است (شکل ۵۵).



شکل ۵۵

حل • نمادهای $S_{ABK}=S$ ، $S_{ABC}=S_1$ و $S_{ABH}=S_2$ را درنظرمی‌گیریم. آنگاه داریم:
$S=\frac{1}{2}AB\cdot KD$ ، $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot CD$ و $S_2=\frac{1}{2}AB\cdot HD$.
بایستی $S=\sqrt{S_1S_2}$ یعنی رابطه های زیر را ثابت کنیم.

$$\frac{1}{2}AB\cdot KD=\sqrt{\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\frac{1}{2}AB\cdot HD} \qquad (1)$$

$$KD^2=CD\cdot HD \qquad (2)$$

مثلث ABK قائم الزاویه بوده و بنابرآن $KD^2=BD\cdot AD$ (قضیه ۶a) است. بدین ترتیب تساوی (2) وقتی برقرار می‌شود که $BD\cdot AD=CD\cdot DH$ یا $\frac{BD}{CD}=\frac{DH}{AD}$ ثابت شود. تساوی آخر بوضوح از تشابه مثلث های BCD HDA (در این مثلث ها، زوایای BCD و HAD به علت تعامد اضلاع آنها بر یکدیگر براساس ارتفاع بودن AE ، برابر هستند) استنتاج می‌شود. از اینرو تساوی (2) و نیز تساوی (1) اثبات می‌گردد.

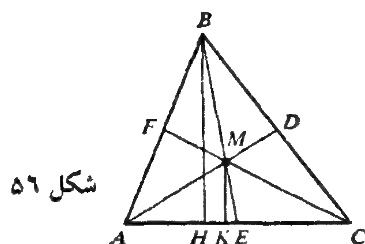
مثال ۲ • در مثلثی میانه های m_a، m_b و m_c معلوم هستند مساحت آن را محاسبه کنید.

حل • قبل از هر چیز $S_{AMC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ را مورد ملاحظه قرار دهید (شکل ۵۶). درحقیقت این مثلث ها دارای قاعده مشترک AC بوده و از اینرو نسبت مساحت های آنها با نسبت ارتفاعات MK و BH برابر خواهد بود (قضیه ۱۸). از تشابه مثلث های MKE و BHE تناسب های $\frac{MK}{BH}=\frac{ME}{BE}$ و $ME:BE=1:3$ (قضیه ۳b) استنتاج می‌شوند. بدین ترتیب مساحت مطلوب S عبارت از $3S_{AMC}$ خواهد بود. مثلث AMC (شکل ۶۷) را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. درمورد دوضلع آن $AM=\frac{2}{3}m_a$ ، $MC=\frac{2}{3}m_c$ بوده و میانه $ME=\frac{1}{3}m_b$ معلوم است (قضیه ۳ مجدداً بکار گرفته شده است).

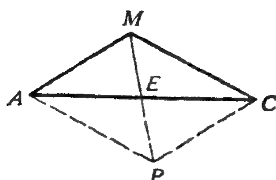
پاره‌خط EP را مساوی ME جدا کرده و P را به A و C وصل می‌کنیم تا متوازی الاضلاع $MCPA$ بدست

آید. چنین استنتاج می‌شود: $S_{AMC}=S_{MCP}=\frac{1}{2}S_{AMCP}$.
سه ضلع یعنی $\frac{2}{3}m_a$، $\frac{2}{3}m_b$، و $\frac{2}{3}m_c$ در مثلث MCP معلوم هستند. از اینرو مساحت مثلث MCP را می‌توان با فرمول هرو بدست آورد (قضیه ۱۹e). بدین ترتیب داریم:

$$S=3S_{AMC}=3S_{MCP}$$
$$=3\sqrt{\frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c)\frac{1}{3}(m_a+m_b-m_c)\frac{1}{3}(m_a+m_c-m_b)}$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{3}(m_b+m_c-m_a)}=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)}$$
$$\times\sqrt{(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$$



شکل ۵۶



شکل ۵۷

مثال ۳ ● درمثلثی اندازهٔ سه زاویه آن برابر مقادیر معلوم α، β و γ است. فاصله های نقطه اختیاری M در درون مثلث از سه ضلع آن برابر مقادیر معلوم m، n و k است (شکل ۵۸). مساحت این مثلث را محاسبه کنید.

حل ● S، مساحت مثلث ABC را می‌توان از طریق فرمول $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\gamma$ بدست آورد که در این رابطه نیز بایستی مقادیر AC و BC یافته شوند. با منظور کردن $BC=x$، آنگاه طبق قانون سینوس ها (قضیه ۸) به $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin\gamma}$ وصول خواهیم یافت که از آن نیز: $AC=\frac{x\sin\beta}{\sin\alpha}$ و $AB=\frac{x\sin\gamma}{\sin\alpha}$ استنتاج می‌شود. بدین ترتیب حل مسئله به یافتن x تحویل می یابد. برای تشکیل معادله از روش مساحت ها (به بخش ۱ مراجعه کنید) استفاده کرده و S مثلث ABC را به عنوان عنصر مرجع منظور می‌کنیم. از یک طرف چنین داریم:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sin\beta}{\sin\alpha}\times x\sin\gamma=\frac{x^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

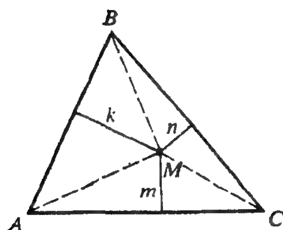
و از طرف دیگر نیز تساوی زیر در دسترس است:

$$S=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{AMC}=\frac{1}{2}AB\cdot k+\frac{1}{2}BC\cdot n+\frac{1}{2}AC\cdot m=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot k+\frac{1}{2}xn+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot m=\frac{x(k\sin\gamma+n\sin\alpha+m\sin\beta)}{2\sin\alpha}$$

از این تساوی به $\frac{x^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\frac{k\sin\gamma+n\sin\alpha+m\sin\beta}{\sin\beta\sin\gamma}$ وصول می یابیم.

با گذاشتن این مقدار $x=\frac{x(k\sin\gamma+n\sin\alpha+m\sin\beta)}{2\sin\alpha}$ بجای x در فرمول اول در مورد مساحت مثلث ABC تساوی زیر بدست می‌آید:

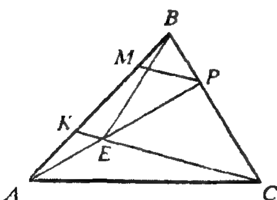
$$S=\frac{x^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\frac{(k\sin\gamma+n\sin\alpha+m\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$



شکل ۵۸

مثال ٤ ● روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC نقاط K و P طوری انتخاب شده‌اند که $AK:BK=1:2$ و $CP:BP=2:1$ است.

خطوط مستقیم AP و CK در نقطه E همدیگر را قطع می‌کنند. اگر مساحت مثلث BEC برابر $4\ cm^2$ باشد آنگاه مساحت مثلث ABC را بدست آورید (شکل ۵۹).



شکل ۵۹

حل ● تساوی های $AK=x, BK=2x, BP=y, CP=2y$ را منظور کرده و $PM \parallel KC$ را رسم می‌کنیم. طبق قضیه تالس $\frac{BM}{MK}=\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}$ بوده و از اینرو $BM=\frac{2x}{3}$ و $KM=\frac{4x}{3}$ است.

از این گذشته مثلث های AKE و AMP مثلث متشابه بوده و از اینرو $\frac{KE}{MP}=\frac{AK}{AM}$ یعنی $\frac{KE}{MP}=\frac{x}{x+\frac{4x}{3}}=\frac{3}{7}$ را داریم. بنابراین $KE=\frac{3}{7}MP$ استنتاج می‌شود.

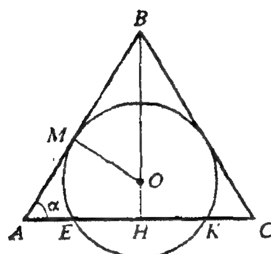
از طرف دیگر $\frac{MP}{KC}=\frac{BP}{BC}=\frac{1}{3}$ یعنی $MP=\frac{1}{3}KC$ را داریم. بدین ترتیب $KE=\frac{1}{7}KC$ حاصل می‌شود و $EC=\frac{6}{7}KC$ خواهد بود. مثلث های BEC و BKC را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. آنها دارای ارتفاع های مشترک (مرسوم از رأس B) بوده و از اینرو نسبت مساحت های آنها با نسبت قاعده های EC و KC برابر است (قضیه ۱۸).

یعنی چنین داریم: $\frac{S_{BKC}}{S_{BEC}}=\frac{KC}{EC}=\frac{7}{6}$. ولی تساوی $S_{BEC}=4\ cm^2$ در دسترس بوده و در نتیجه $S_{BKC}=\frac{7}{6}\cdot 4=\frac{14}{3}\ cm^2$ خواهد بود. سرانجام مثلث های BKC و ABC را مورد بررسی قرار می‌دهیم. آنها دارای ارتفاع مشترک (مرسوم از رأس C) بوده و از اینرو نسبت مساحت های آنها با نسبت قاعده هایشان برابر خواهد بود: $\frac{S_{ABC}}{S_{BKC}}=\frac{AB}{BK}=\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

بدین ترتیب چنین حاصل می‌شود:

$$S_{ABC}=\frac{3}{2}S_{BKC}=\frac{3}{2}\times\frac{14}{3}=7\ cm^2$$

مثال ۵ ● زاویه A از مثلث $ABC(AB = BC)$ برابر $\arctan \frac{8}{15}$ است (شکل ۶۰). دایره‌ای به شعاع $1\ cm$ بر اضلاع AB و BC مماس بوده و قاعده AC را در نقاط E و K قطع می‌کند (E بین A و K قرار دارد). M نقطه تماس دایره و خط مستقیم BA بوده و $AM = \frac{15}{8}\ cm$ است. مساحت مثلث AMK را محاسبه کنید.



شکل ۶۰

حل ● قبل از هر چیز بایستی محاسباتی را انجام دهیم که ما را به یافتن موقعیت مرکز دایره قادر می‌سازد (ابتدائاً بدیهی بنظر می‌رسد که چون BA و BC بر دایره مماس هستند از اینرو مرکز دایره روی ارتفاع BH از مثلث متساوی الساقین ABC قرار داشته و درنتیجه مرکز دایره روی نیمساز زاویه بین ساق ها واقع خواهد بود) (قضیه 12b). زاویه BAC را با α نشان می‌دهیم. از نقطه تماس، شعاع OM را رسم می‌کنیم. آنگاه زاویه BOM نیز برابر α خواهد بود. طبق فرض، $\tan\alpha = \frac{8}{15}$ است. با استفاده از فرمول $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ به $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ و درنتیجه به $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{8}{17}$ وصول می‌یابیم.
از مثلث BOM درمی‌یابیم که: $BO = \frac{OM}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{15}$ و $BM = OM\ \tan\alpha = \frac{8}{15}$.

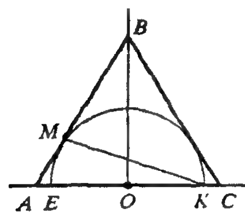
از این گذشته چنین داریم:

$$AB = AM + BM = \frac{15}{8} + \frac{8}{15} = \frac{289}{120}\ ،\ BH = AB\sin\alpha = \frac{289}{120}\cdot\frac{8}{17} = \frac{17}{15}$$

این امر بدین معنی است که $BH = BO$ بوده و از اینرو نقاط O و H بر هم منطبق هستند. بنابراین برای حل مجدد مسئله بایستی شکل جدید (صحیح) را رسم کنیم (شکل ۶۱).
با کمک فرمول $S = \frac{1}{2}AM\cdot AK\cdot\sin\alpha$ مساحت مثلث AMK را تعیین می‌کنیم. می‌دانیم که $AM = \frac{15}{8}\ cm$ و $\sin\alpha = \frac{8}{15}$ است.

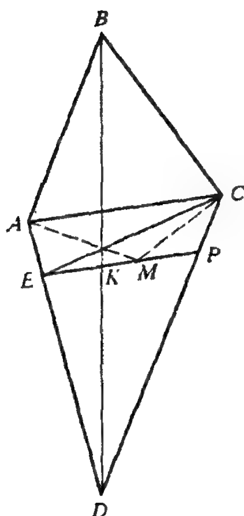
بدین ترتیب حل مسئله به یافتن طول پاره خط AK تحویل می یابد. از تساوی $AM^2 = AE\cdot AK$ (قضیه ۱۶c) استفاده می‌کنیم. اگر $AE = x$ را در نظر بگیریم آنگاه $AK = 2 + x$ بوده و معادله $\frac{225}{64} = x(2 + x)$ استنتاج می‌شود که از آن نیز $x = \frac{9}{8}$ بدست می‌آید.
آنگاه $AK = \frac{9}{8} + 2 = \frac{25}{8}\ cm$ بوده و درنتیجه تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$S_{AMK} = \frac{1}{2}AM\cdot AK\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{25}{8}\cdot\frac{8}{17} = \frac{375}{272}\ cm^2$$



شکل ۶۱

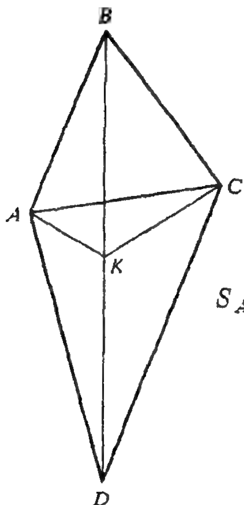
مثال ۶ ● از میانگاه قطر BD در چهارضلعی $ABCD$ خطی به موازات قطر AC رسم می‌کنیم. این خط ضلع AD را در نقطه E قطع می‌کند. ثابت کنید که خط CE چهارضلعی $ABCD$ را به دوقسمت هم ارز (هم مساحت) تقسیم می‌کند (شکل ۶۲).



شکل ۶۲

حل ● بایستی ثابت کنیم که مساحت چهارضلعی $ABCE$ برابر نصف مساحت چهارضلعی $ABCD$ است. این نکته دقیقاً به معنی تساوی مساحت های دوشکل $ABCE$ و CED یا هم ارزی آنها خواهد بود. توجه داشته باشید که چهارضلعی $ABCE$ با چهارضلعی $ABCM$ هم ارز است که در آن M نقطه ای روی خط EP است: درحقیقت مثلث های ACE و ACM دارای قاعده مشترک و ارتفاعات مساوی هستند؛ زیرا نقاط E و M روی خط مستقیم موازی با قاعده AC قرار دارد. این حقیقت، اندیشه تعویض چهارضلعی $ABCK$ با چهارضلعی $ABCE$ هم ارز با آن را تسریع می‌بخشد که در آن K نقطه اختیاری خاصی روی EP است. میانگاه قطر BD را به عنوان نقطه K در نظر می‌گیریم (شکل ۶۳).

چنین داریم: $S_{ABCK} = \frac{1}{2} AC \cdot BK \cdot \sin\alpha$ ،
بطوریکه α زاویه بین قطرهاست (قضیه ۲۰b).
طبق فرض $BK = \frac{1}{2} BD$ را داریم. بدین ترتیب رابطه زیر حاصل می‌شود که اثبات آن مطلوب مسئله بود:



$$S_{ABCK} = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha\right) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

شکل ۶۳

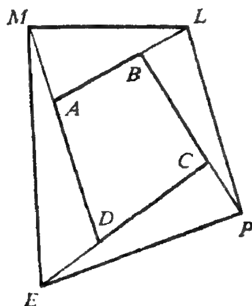
مثال ۷ ● مساحت چهارضلعی محدب $ABCD$ برابر 2cm^2 است. ضلع AB را از طرف نقطه B با شرط $BL = \frac{1}{2}AB$، ضلع BC را از طرف نقطه C با شرط $CP = \frac{1}{2}BC$، ضلع CD را از طرف نقطه D با شرط $DE = \frac{1}{2}CD$ و ضلع DA را از طرف نقطه A با شرط $AM = \frac{1}{2}AD$ امتداد می‌دهیم. مساحت چهارضلعی $MLPE$ را محاسبه کنید (شکل ٦٤).

حل ● نمادهای $AB = a,\ BC = b,\ CD = c$ و $DA = m$ را منظور می‌کنیم. مثلث AML را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در این مثلث $AM = \frac{1}{2}m$ و $AL = \frac{3}{2}a$ بوده و آنگاه مساحت S_1 با $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{3}{2}a\cdot\sin\alpha$ برابر می‌شود که در آن $\angle MAL = \alpha$ است. این عبارت را با مساحت مثلث ABD مقایسه می‌کنیم: $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}am\sin\alpha$. توجه داریم که $S_1 = \frac{3}{4}S_{ABD}$ است. بطریق مشابه مساحت S_3 مربوط به مثلث CPE با مساحت مثلث BCD با فرمول $S_3 = \frac{3}{4}S_{BCD}$ ارتباط پیدا می‌کند. از اینرو داریم:

$$S_1 + S_3 = \frac{3}{4}(S_{ABD} + S_{BCD}) = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{4}\cdot 2 = 1.5\ \text{cm}^2$$

به همین طریق اگر $S_2 = S_{BLP}$ و $S_4 = S_{MDE}$ را منظور کنیم به $S_2 + S_4 = 1.5\text{cm}^2$ وصول می‌یابیم. درنتیجه تساوی زیر استنتاج می‌شود:

$$S_{MLPE} = S_{ABCD} + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2 + 1.5 + 1.5 = 5\ \text{cm}^2.$$



شکل ٦٤

مثال ۸ ● دایره‌ای با مرکز O بر مثلث ABC با زاویه حاده A محیط شده است. شعاع AO با ارتفاع AH زاویه‌ای به اندازهٔ 30° می‌سازد. امتداد نیمساز AF دایره را در نقطه L و شعاع AO ضلع BC را در نقطه E قطع می‌کند (شکل ٦٥). اگر $AL = 4\sqrt{2}$ cm و $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$ cm باشد آنگاه مساحت چهارضلعی $FEOL$ را محاسبه کنید.

حل ● در مثال ٦ مساحت چهارضلعی را با استفاده از قضیه ۲۰b، و در مثال ۷ به عنوان حاصلجمع مساحت های اجزاء تشکیل دهندهٔ آن محاسبه کردیم. در حالت اخیر توصیه می‌شود که چهارضلعی مطروحه را به عنوان تفاضل مثلث های AOL و AFE مدنظر قرار دهیم.

از اینرو $S_{FEOL} = S_{AOL} - S_{AFE}$ را خواهیم داشت. بنابراین حل دیگر مسئله اساساً به محاسبه

عناصر گوناگون (زوایا، اضلاع) مثلث های AOL و AFE تحویل می یابد. ثابت می‌کنیم که OL موازی AH است. برای این کار $\angle LAB = \angle CAL$ (طبق فرض) را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. بنابراین $\smile BL = \smile CL$ خواهد بود. آنگاه وترهای CL و BL نیز مساوی بوده و درنتیجه مثلث CBL متساوی الساقین خواهد بود (شکل ۶۶). مرکز O مربوط به دایره محیطی مثلث CBL روی ارتفاع KL قرار دارد. بدیهی است که $AH \parallel KL$ بوده و از اینرو $AH \parallel OL$ خواهد بود. آنگاه داریم:

$$\angle HAF = \angle ALO = \angle LAO = \frac{1}{2}\angle HAO = \frac{1}{2}\cdot 30^\circ = 15^\circ.$$

و بدین ترتیب به عنوان مقدمه، مطالب را چنین خلاصه می‌کنیم: AOL، یک مثلث متساوی الساقین با زاویه های 15°، 15° و 150° است. ضلع AL این مثلث برابر $4\sqrt{2}$ cm است. این امر برای محاسبهٔ مساحت آن کافی است.

طبق قاعده کسینوس ها (قضیه ۷) چنین داریم: $AL^2 = AO^2 + OL^2 - 2AO\cdot OL\cdot \cos 150^\circ$

از این رابطه با قرار دادن $AO = OL = R$ چنین حاصل می‌شود: $(4\sqrt{2})^2 = R^2 + R^2 + 2R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $R^2 = \frac{32}{2+\sqrt{3}} = 32(2-\sqrt{3})$، از این گذشته داریم:

$$S_{AOL} = \frac{1}{2}AO\cdot OL\cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2}R^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\times 32(2-\sqrt{3}) = 8(2-\sqrt{3})\ \text{cm}^2.$$

حال مساحت مثلث AFE را محاسبه می‌کنیم. چنین داریم:

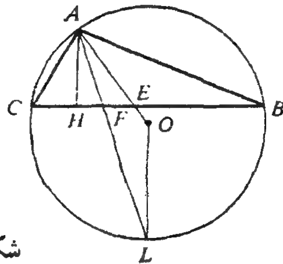
$$HE = AH\tan 30^\circ = \sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ، \quad HF = AH\tan 15^\circ = \sqrt{2\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})$$

$$FE = HE - HF = \sqrt{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2\sqrt{3}}\,\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

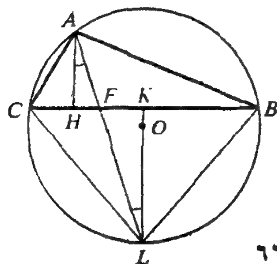
$$S_{AFE} = \frac{1}{2}FE\cdot AH = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}}\,\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3})\ \text{cm}^2$$

از اینرو تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$S_{FEOL} = S_{AOL} - S_{AFE} = 8(2-\sqrt{3}) - 2(2-\sqrt{3}) = 6(2-\sqrt{3})\ \text{cm}^2$$



شکل ۶۵



شکل ۶۶

مثال ۹ ● در پنج ضلعی $ABCDE$ معلومات $BC = CD$، $AB = \sqrt{2}$، $\angle ABE = 45^\circ$ و

$\angle DBE = 30°$ را داریم (شکل ۶۷). اگر دایره‌ای به شعاع 1 cm را بتوان بر این پنج ضلعی محیط کرد در آنصورت مساحت پنج ضلعی را بدست آورید.

حل ● به محاسبه مساحت پنج ضلعی مطروحه بصورت محاسبه حاصلجمع مساحت های مثلث های ABE، BDE و BCD می‌پردازیم. طبق قانون سینوس ها در مورد مثلث ABE به $\frac{AE}{\sin 45°}=2R$ یعنی $AE = \sqrt{2}$ وصول می یابیم. از اینرو ABE، مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه خواهد بود که در آن $AB = AE = \sqrt{2}$ است. بنابراین $BE = 2$ و $S_{ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot AE = 1$ حاصل می‌شود. بدلیل $BE = 2$، خط BE قطر دایره خواهد بود. از اینرو BDE مثلث قائم الزاویه بوده و از آن $DE = 1$، $BD = \sqrt{3}$ و $S_{BDE} = \frac{1}{2}BD \cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ استنتاج می‌شود.

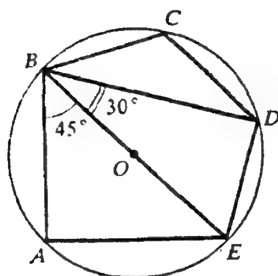
سرانجام مثلث BCD را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که در آن $BD = \sqrt{3}$ است. طبق قانون سینوسها، $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = 2R$ یعنی $\sin \angle BCD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را داریم.

از اینرو چنین حاصل می‌شود: $\angle BCD = 120°$ و $\angle CBD = \angle CDB = 30°$.

بدلیل $\frac{BC}{\sin 30°} = 2R$ نتیجه می‌شود که:

$$BC = CD = 1 \text{ و } S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin \angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بدین ترتیب داریم: $S_5 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4+3\sqrt{3}}{4}$.



شکل ۶۷

مثال ۱۰ ● مرکز چهار دایره با شعاع های مساوی a روی رئوس مربعی با ضلع a قرار دارند. مساحت سطح مشترک این دایره ها را محاسبه کنید (شکل ۶۸).

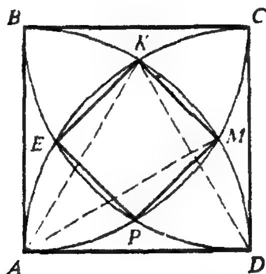
حل ● بدلائل تقارن نتیجه می‌شود که چهارضلعی $EKMP$ یک مربع است. از اینرو شکل مطلوب از یک مربع و چهار قطعه مساوی ترکیب شده است. برای محاسبه مساحت یکی از این قطعات قبل از هر چیزی بایستی زاویه مرکزی متناظر به آن را بیابیم. از آنجا که مثلث AKD متساوی الاضلاع است از اینرو $\angle KAD = 60°$ بوده و درنتیجه $\angle BAK = 30°$ خواهد بود. بطریق مشابه $\angle MAD = 30°$ و درنتیجه $\angle KAM = 30°$ حاصل می‌شود. با استفاده از قضیه ۲۴ مساحت یکی از این قطعات بصورت $S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$ حاصل می‌شود. برای محاسبه طول ضلع مربع $EKMP$ قانون

کسینوس ها را در مورد مثلث AKM بکار می‌گیریم:

$$KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK\cdot AM\cdot\cos 30^\circ$$

یعنی: $KM^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2(2-\sqrt{3})$. سرانجام چنین حاصل می‌شود:

$$S = S_{\text{مربع}} + 4S_{\text{۱ قطعه}} = a^2(2-\sqrt{3}) + 2a^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right) = a^2\left(1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$$



شکل ۶۸

مثال ۱۱ ● دایره‌ای بر اضلاع AC و BC از مثلث ABC بترتیب در نقاط D و E مماس بوده و مرکز آن روی ضلع AB قرار دارد. اگر BC=13cm، AB=14cm و AC=15cm باشد مساحت قطاع DOE را محاسبه کنید (شکل ۶۹).

حل ● برای محاسبه شعاع قطاع روش مساحت ها را بکار می‌گیریم (به بخش ۱ مراجعه کنید). از طرف دیگر S، مساحت مثلث ABC را می‌توان طبق فرمول هرو (قضیه ۱۹e) محاسبه کرد: $S = 84 \quad \text{cm}^2$

$$S = S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{1}{2}AC\cdot DO + \frac{1}{2}BC\cdot OE = \frac{1}{2}(15+13)r = 14r$$

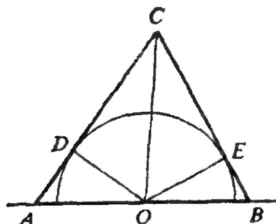
از اینرو $14r = 84$ و $r = 6$ cm را داریم. برای یافتن مساحت قطاع ضروری است که زاویه مرکزی آن یعنی زاویه DOE را بدست آوریم.

از چهارضلعی $ODCE$ نتیجه می‌شود که $\angle DOE = \pi - \gamma$ است بطوریکه در آن $\angle ACB = \gamma$ است. طبق قانون کسینوسها $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\gamma$ را داریم.

بنابراین $14^2 = 13^2 + 15^2 - 2\cdot 13\cdot 15\cdot\cos\gamma$ نتیجه می‌شود که از آن $\cos\gamma = \frac{99}{195}$ و درنتیجه $\gamma = \arccos\frac{99}{195}$ استنتاج می‌شود.

بدین ترتیب نتیجه می‌شود که زاویه مرکزی قطاع برابر $\pi - \arccos\frac{99}{195}$ است. طبق قضیه ۲.۳ چنین حاصل می‌شود:

$$S_{\text{sector}} = \frac{1}{2}r^2\left(\pi - \arccos\frac{99}{195}\right) = 18\left(\pi - \arccos\frac{99}{195}\right)$$



شکل ۶۹

مثال ۱۲ ● نقطه M در داخل مثلث ABC با اضلاع a، b و c طوری اختیار شده است که اتصال این نقطه به رئوس مثلث در داخل آن زوایای متساوی تشکیل می‌دهد. عبارت $AM + BM + CM$ را محاسبه کنید (شکل ۷۰).

حل ● به عنوان تمایز با مسائل قبل می‌توان گفت که این مسئله در مورد محاسبه مساحت یک شکل مستوی بحث نمی‌کند. از این گذشته همانطوریکه خواهیم دید، مساحت مثلث به عنوان وسیله ای برای حل مسئله استنتاج می‌شود. تساوی های $AM = x$، $BM = y$ و $CM = z$ را منظور می‌کنیم. طبق فرض $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC = 120°$ است.

با استفاده از قاعده کسینوس ها در مورد هر یک از مثلث های AMB، BMC و AMC دستگاه معادلات زیر حصول می یابد:

$$\begin{cases} a^2 = z^2 + y^2 + yz \\ b^2 = x^2 + z^2 + xz \\ c^2 = x^2 + y^2 + xy \end{cases}$$

از این گذشته چنین داریم:

$$S = S_{ABC} = S_{AMC} + S_{BMC} + S_{AMB} = \frac{1}{2} xz \sin 120° + \frac{1}{2} yz \sin 120° + \frac{1}{2} xy \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(xz + yz + xy)$$

بنابراین $xy + xz + yz = \frac{4S}{\sqrt{3}}$ را خواهیم داشت که در آن $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$ است. یافتن مقدار عبارت $x + y + z$ مورد نیاز است.

با تجمیع سه معادله دستگاه چنین حاصل می‌شود:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

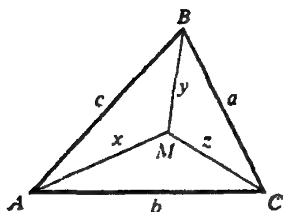
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{1}{2}(xy + xz + yz)$$

از اینرو داریم:

$$(x + y + z)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{3}{2}(xy + xz + yz) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}$$

در نتیجه تساوی زیر بدست می‌آید:

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}$$



شکل ۷۰

مثال ۱۳ ● در مثلث ABC، $AC:BC = 2:1$ و $\angle C = \arccos \frac{3}{4}$ است. نقطه D را با شرط $CD:AD = 1:3$ روی ضلع AC اختیار می‌کنیم. نسبت شعاع دایره محیطی مثلث ABC بر شعاع دایره محاطی مثلث ABD را بدست آورید.

حل ● پارامتر کمکی $CD = a$ را منظور می‌کنیم. آنگاه $AD = 3a$، $AC = 4a$ و $BC = 2a$ خواهد بود (شکل ۷۱). برای یافتن R، شعاع دایره محیطی مثلث ABC به محاسبه ضلع AB بوسیله قانون کسینوسها مبادرت کرده و سپس قانون سینوس ها را بکار می‌گیریم.

چنین داریم: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$؛ یعنی:

$$AB^2 = 16a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 4a \cdot 2a \cdot \frac{3}{4}$$

از این رابطه $AB = 2a\sqrt{2}$ استنتاج می‌شود. طبق فرض $\cos C = \frac{3}{4}$ بوده و از اینرو

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

را خواهیم داشت. طبق قانون سینوسها $2R = \frac{AB}{\sin C}$ و درنتیجه $2R = \frac{2a\sqrt{2} \cdot 4}{\sqrt{7}}$ را داریم.

از این رابطه، $R = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ بدست می‌آید. شعاع r دایره محاطی مثلث ABD با فرمول $r = \frac{S}{p}$ بدست می‌آید که در آن S مساحت و p نصف محیط مثلث ABD است.

می‌دانیم که $AD = 3a$ و $AB = 2a\sqrt{2}$ است. ضلع BD از مثلث BCD را طبق قانون کسینوس ها بدست می‌آوریم: $BD^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{3}{4}$؛ از این تساوی $BD = a\sqrt{2}$ حصول می‌یابد.

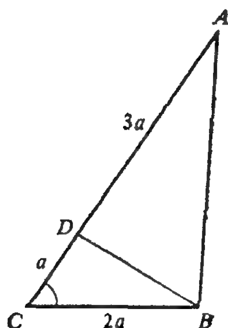
از اینرو داریم: $p = \frac{3a + 2a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a}{2} + \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. مساحت S مثلث ABD با فرمول هرو محاسبه می‌شود:

$$S = \sqrt{p(p-AD)(p-AB)(p-BD)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{2} + \frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2} - \frac{3a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9a^2}{2} - \frac{9a^2}{4}\right)\left(\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right)} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$$

از اینرو داریم: $r = \frac{S}{p} = \frac{a\sqrt{7}}{2(\sqrt{2}+1)}$ و $\frac{R}{r} = \frac{8}{7}(2 + \sqrt{2})$.



شکل ۷۱

مسائل

۱ • مساحت مثلث ها

۲۲۰ • اگر در مثلثی m_a و m_b میانه و α زاویه بین آن ها باشد ثابت کنید که مساحت مثلث برابر $\frac{2}{3}m_a m_b \sin\alpha$ است.

۲۲۱ • در مثلث ABC، $AC = 3\ \text{cm},\ \angle A = 30^\circ$ بوده و شعاع دایره محیطی مثلث برابر 2 cm است. ثابت کنید که مساحت مثلث ABC از $3\ \text{cm}^2$ کمتر است.

۲۲۲ • اگر در مثلثی b و c، طول دو ضلع از آن و S مساحت مثلث باشد، $S \leqslant \frac{b^2+c^2}{4}$ را ثابت کنید.

۲۲۳ • اضلاع مثلثی برابر 55 cm، 55 cm و 66 cm است. مساحت مثلثی را پیدا کنید که رئوس آن پای نیمسازهای مثلث مطروحه است.

۲۲۴ • در مثلث ABC، $AB = 13\ \text{cm}$، $BC = 15\ \text{cm}$ و $AC = 14\ \text{cm}$ است. در این مثلث ارتفاع BH، نیمساز BD و میانه BM را رسم می‌کنیم. (a) مساحت مثلث BHD را بدست آورید؛ (b) مساحت مثلث BMD را محاسبه کنید؛ (c) مساحت مثلث BHM را پیدا کنید.

۲۲۵ • روی هر یک از میانه های مثلثی نقطه ای را اختیار می‌کنیم که آنها را به نسبت 5:1 تقسیم می‌کند. قطعه بزرگتر روی آنها در طرف رأس مثلث قرار دارد. اگر مساحت مثلث مفروض $64\ \text{cm}^2$ باشد مساحت مثلثی را بدست آورید که رئوس آن روی نقاط مطروحه در فرض مسئله قرار دارند.

۲۲۶ • مربعی در داخل مثلثی با قاعده a محاط شده است. اگر ضلع مربع از نصف قاعده مثلث بزرگتر بوده و مساحت مربع یک چهارم مساحت مثلث باشد آنگاه مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲۲۷ • بر مثلث ABC با زاویه $B = 60^\circ$ دایره ای به شعاع 4 cm را محیط کرده ایم. قطری از دایره بر ضلع BC عمود بوده و AB را با شرط $AM:BM = 2:3$ در نقطه M قطع می‌کند. مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲۲۸ • اگر در مثلث قائم الزاویه ای مجموع سینوس های زوایای حادهٔ آن برابر q باشد آنگاه مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲۲۹ • در مثلث قائم الزاویه ای اندازهٔ یکی از زوایای حاده برابر α است. فاصله رأس حاده دیگر از مرکز دایره محاطی آن برابر m است. مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲۳۰ • در مثلث حادة الزاویه ABC، $AB = c$ بوده و در مورد میانه آن نیز $BD = m$ را داریم. همچنین $\angle BDA = \beta$ ($\beta < 90^\circ$) است. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۲۳۱ • اندازه هر یک از زاویه های مجاور به قاعده در مثلث متساوی الساقینی برابر α است. از رأس یکی از این زاویه ها خطی را عبور می‌دهیم که با قاعده زاویه β می‌سازد ($\alpha > \beta$). این خط مثلث را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت مساحت های این دو قسمت را بیابید.

۲۳۲ • از میانگاه یکی از اضلاع مثلث متساوی الاضلاع خطی را طوری رسم می‌کنیم که با آن ضلع

زاویه حاده α را تشکیل دهد. این خط مثلث مفروض را به دو بخش تقسیم می‌کند. نسبت مساحت های آنها را بیابید.

۲۳۳ • در مثلث ABC، $\angle A = \alpha$ و $\angle C = \gamma$ است. نیمساز BD، ارتفاع BH و میانه BM را در این مثلث رسم می‌کنیم. مطلوبست: (a) نسبت مساحت مثلث BDM به مساحت ABC، (b) نسبت مساحت BHM به مساحت مثلث ABC؛ (c) نسبت مساحت مثلث BHD به مساحت مثلث ABC.

۲۳۴ • مساحت مثلثی با اضلاع a و b را که طول میانه بین این اضلاع برابر $l_c = l$ است بیابید.

۲۳۵ • میانه AD در مثلث ABC دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع می‌کند. اگر $\overset{\circ}{A}B + AD = DE$، $\angle BAD = 60°$ و $AE = 6$ باشد مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۲۳۶ • S مساحت یک مثلث و R شعاع دایره محیطی آن است. $S < \frac{1}{2}\pi R^2$ را ثابت کنید.

۲۳۷ • یکی از زوایای مثلثی برابر $60°$ است. نقطه تماس دایره محاطی آن ضلع مقابل به این زاویه را به قطعاتی به طول های a و b تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲۳۸ • از نقطه M واقع بر ضلع AB مثلث ABC خطوطی را بصورت $MQ \parallel AC$ و $MP \parallel BC$ رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث BMQ برابر S_1 و مساحت مثلث ABC برابر S_2 باشد مساحت مثلث AMP را بیابید.

۲۳۹ • از نقطه ای واقع در درون مثلثی خطوطی به موازات اضلاع آن رسم می‌کنیم. این خطوط مثلث را به شش قسمت تقسیم می‌کند که سه تا از آنها مثلث بوده و مساحت این مثلث‌ها برابر S_1، S_2 و S_3 است. مساحت مثلث اصلی را بیابید.

۲۴۰ • دایره ای درون مثلثی با اضلاع 16 cm، 30 cm و 34 cm محاط شده است. مساحت مثلثی را پیدا کنید که رئوس آن بر نقاط تماس دایره و مثلث فوق الذکر قرار دارد.

۲۴۱ • مثلث ABC با ضلع $AC = 20$ cm درون دایره ای محاط شده است. از نقطه B خطی را بر دایره مماس رسم می‌کنیم. فاصله نقاط A و C از خط مماس بترتیب برابر 25 cm و 16 cm است. مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲۴۲ • از نقطه M واقع در درون مثلث ABC عمودهای MD، ME و MF را بترتیب بر اضلاع AB، BC و AC رسم می‌کنیم. اگر $AB = c$، $MF = m$، $ME = k$، $AC = b$، $BC = a$ و $MD = n$ باشد نسبت مساحت مثلث های ABC و DEF را بدست آورید.

۲۴۳ • در مثلث ABC ارتفاعات AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. اگر زوایای مثلث ABC برابر α، β و γ باشد در آنصورت نسبت مساحت مثلث های DEF و ABC را بیابید.

۲۴۴ • وتر AB به کمانی از یک دایره نگاه می‌کند که طول آن یک سوم کمان محیط دایره است. نقطهٔ C را روی این کمان و نقطهٔ D را روی وتر AB اختیار می‌کنیم.
اگر $AD = 2$ cm، $BD = 1$ cm و $CD = \sqrt{2}$ cm باشد مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲۴۵ ● در مثلث ABC ، زاویه C برابر $60°$ و شعاع دایره محیطی برابر $2\sqrt{3}$ cm است. روی ضلع AB نقطه D را با شرایط $AD:DB = 2:1$ و $CD=2\sqrt{2}$ cm اختیار می‌کنیم. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۲۴۶ ● زاویه A از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ برابر $\arcsin\frac{5}{13}$ است. دایره‌ای که فاصله مرکز آن از رأس B برابر $\frac{13}{24}$cm است ساق های AB و BC را بترتیب در نقاط K و P قطع کرده و پاره‌خط EF را روی قاعده جدا می‌کند. اگر $PC = \frac{6}{5}$cm باشد مساحت مثلث EPC را پیدا کنید.

۲۴۷ ● دایره‌ای بر مثلث ABC محیط شده است. در نقطه B بر دایره مماس رسم می‌کنیم و این مماس خط AC را در نقطه D قطع می‌کند. نقطه C بین A و D قرار دارد.
اگر $BD = 29$ cm و $\angle BDC = \arccos\frac{21}{29}$ بوده و فاصله مرکز دایره تا AC برابر 10 cm باشد آنگاه مساحت مثلث BCD را بدست آورید.

۲ ● مساحت چهارضلعی ها

۲۴۸ ● از رئوس یک چهارضلعی خطوطی را به موازات اقطار آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت متوازی الاضلاع حاصله دو برابر چهارضلعی مفروض است.

۲۴۹ ● طول اضلاع غیرموازی متوازی الاضلاعی برابر a و b وزاویه بین آنها برابر α است. مساحت چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای داخلی متوازی الاضلاع را محاسبه کنید.

۲۵۰ ● میانهٔ ذوزنقه متساوی الساقینی برابر a و اقطار آن متعامد هستند. مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۵۱ ● محیط ذوزنقه ای برابر 52 cm وطول قاعده کوچکتر آن برابر 4 cm است. اگر اقطار ذوزنقه نیمساز زوایای منفرجه آن باشد مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۵۲ ● دو دایره با شعاع های 4 cm و 8 cm وبا مراکز O_1 و O_2 همدیگر را در نقاط C و D قطع کرده و AB مماس مشترک خارجی آنها محسوب می‌شود. اگر مماس های مرسوم بر دو دایره در نقطه C متعامد باشند مساحت چهارضلعی O_1ABO_2 را محاسبه کنید.

۲۵۳ ● دو دایره با شعاع R و مراکز O_1 و O_2 بر هم مماس خارجی هستند. خط مستقیم l دو دایره را در نقاط A، B، C و D با شرط $AB=BC = CD$ قطع می‌کند. مساحت چهارضلعی O_1ADO_2 را بدست آورید.

۲۵۴ ● اضلاع مثلثی برابر 20 cm، 34 cm و 42 cm است. یکی از ارتفاعات از طرف رأس به نسبت 3:1 تقسیم شده است. در این نقطه تقسیم خطی را بر ارتفاع عمود کرده ایم. مساحت ذوزنقه حاصله را بدست آورید.

۲۵۵ ● اضلاع مثلثی برابر 20 cm، 34 cm است. اگر محیط مستطیل محاط در این دایره برابر 45 cm

باشد مساحت آن را بدست آورید.

۲۵۶ • طول قاعده های ذوزنقه ای برابر $62\ cm$، $20\ cm$ و طول اضلاع غیرموازی آن برابر $45\ cm$ و $39\ cm$ است. مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۵۷ • طول قاعده های ذوزنقه ای برابر $30\ cm$ و $12\ cm$، و طول اقطار آن نیز برابر $20\ cm$ و $34\ cm$ است. مساحت این ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۵۸ • طول یکی از قاعده های ذوزنقه ای برابر $7\ cm$ است. دایره محاط در ذوزنقه یکی از اضلاع جانبی آن را به دو پاره خط به طولهای $4\ cm$ و $9\ cm$ تقسیم می‌کند، مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۵۹ • در ذوزنقهٔ $ABCD$، نقطه K میانگاه قاعده AD، نقطه M میانگاه قاعده BC، BK نیمساز زاویه ABC و DM نیز نیمساز زاویه ADC است. اگر محیط ذوزنقه $ABCD$ برابر $30\ cm$ و $\angle BAD = 60°$ باشد مساحت این ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۶۰ • در چهارضلعی $ABCD$ نقاط E، F، P و K بترتیب میانگاه اضلاع AB، BC، CD و AD است. اگر $AC = 15cm$ و $BD = 20\ cm$ و $EP = KF$ باشد مساحت چهارضلعی $ABCD$ را محاسبه کنید.

۲۶۱ • در یک متوازی الاضلاع، اضلاع a و b $(a > b)$ و α، اندازه زاویه بین قطرها معلوم است. مساحت این متوازی الاضلاع را محاسبه کنید.

۲۶۲ • در ذوزنقه ای یکی از قاعده ها، قطر دایره ای به شعاع R محسوب می‌شود که بر ذوزنقه محیط است. اندازه زاویه یکی از زوایای حاده در این ذوزنقه برابر α است. مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۶۳ • دایره ای در ذوزنقه ای با زوایای حاده α و β محاط شده است. نسبت مساحت ذوزنقه را به مساحت دایره محاسبه کنید.

۲۶۴ • در مثلث ABC، $\angle C = \gamma$، $\angle B = \beta$، $\angle A = \alpha$، و ارتفاع $BD = H$ را داریم. روی ضلع BD به عنوان قطر، دایره ای رسم می‌کنیم و این دایره اضلاع AB و BC را بترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. مساحت چهارضلعی $BFDE$ را محاسبه کنید.

۲۶۵ • خط مستقیم l به موازات قاعده AC از مثلث ABC مثلث BED را از این مثلث جدا می‌کند. نقطه دلخواه M را روی ضلع AC اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی $BEMD$ بین مساحت مثلث ABC و مساحت مثلث BED واسطه هندسی است.

۲۶۶ • اقطار ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ همدیگر را در نقطه O قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث AOD برابر a^2 و مساحت مثلث BOC برابر b^2 باشد مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۲۶۷ • در لوزی $ABCD$، نقاط M، N، P و Q بترتیب میانگاه های اضلاع AB، BC، CD و AD است. اگر مساحت لوزی برابر $100\ cm^2$ باشد مساحت چهارضلعی محصور با خطوط AN، BP، DM و CQ را محاسبه کنید.

۲۶۸ • دایره‌هایی به شعاع a و b برهم مماس خارجی هستند. مماس های مشترک خارجی آنها را رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ای را بیابید که رئوس آن نقاط تماس خطوط و دایره ها محسوب می‌شود.

۲۶۹ • اقطار چهارضلعی $ABCD$ همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. اگر مساحت های مثلث های AOB ، BOC و COD برابر $12\ cm^2$ ، $18\ cm^2$ و $24\ cm^2$ باشند مساحت چهارضلعی را محاسبه کنید.

۲۷۰ • دایره‌ای بر اضلاع AB و AD از مستطیل $ABCD$ مماس بوده و از رأس C آن عبور می‌کند. این دایره ضلع DC را در نقطه K قطع می‌کند. اگر $AB = 9\ cm$ و $AD = 8\ cm$ باشد مساحت چهارضلعی $ABKD$ را محاسبه کنید.

۲۷۱ • نقطه M را در درون مستطیل $ABCD$ طوری اختیار می‌کنیم که:
$AM = \sqrt{2}$ ، $BM = 2$ و $CM = 6$ باشد. اگر $AD = 2AB$ باشد مساحت مستطیل $ABCD$ را محاسبه کنید.

۳ • مساحت چندضلعی ها

۲۷۲ • روی اضلاع AC و BC ، و وتر AB مثلث قائم الزاویه ABC و در بیرون آن مربع های $CMPA$ ، $BEFC$ و $ADKB$ را رسم می‌کنیم. اگر $c = AB$ و $S = S_{\Delta ABC}$ باشد مساحت شش ضلعی $DKEFMP$ را محاسبه کنید.

۲۷۳ • روی اضلاع AC ، BC و AB از مثلث ABC مربع های $CMPA$ ، $BEFC$ و $ADKB$ را رسم می‌کنیم. اگر $AB = 13\ cm$ ، $AC = 14\ cm$ و $BC = 15\ cm$ باشد مساحت شش ضلعی $DKEFMP$ را محاسبه کنید.

۲۷۴ • روی گوشه های مربعی به ضلع a ، قطعاتی را طوری می‌بریم که یک هشت ضلعی منتظم بدست آید. مساحت این هشت ضلعی را محاسبه کنید.

۲۷۵ • مربعی با ضلع a معلوم است. روی هریک از اضلاع مربع و خارج آن ذوزنقه هایی را طوری رسم می‌کنیم که قاعده های بالائی و اضلاع جانبی آن ها یک دوازده ضلعی منتظم تشکیل دهند. مساحت این دوازده ضلعی را محاسبه کنید.

۲۷۶ • دایره‌ای را با نقاط A ، B ، C ، D ، E ، F ، P ، K به هشت قسمت تقسیم کرده‌ایم. می‌دانیم که $\cup AB = \cup CD = \cup EF = \cup PK$ ، $\cup BC = \cup DE = \cup FP = \cup KA$ و $\cup AB = 2\cup BC$ است.
اگر مساحت دایره برابر $289\pi\ cm^2$ باشد مساحت هشت ضلعی $ABCDEFPK$ را محاسبه کنید.

۲۷۷ • در درون دایره‌ای به شعاع R یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع را که دارای یک رأس مشترک هستند محاط کرده‌ایم. مساحت مقطع این دو شکل را محاسبه کنید.

۲۷۸ • هریک از اضلاع مثلثی را به قسمت های با نسبت $3:2:3$ تقسیم کرده‌ایم. از اتصال این نقاط یک شش ضلعی بدست می‌آید. نسبت مساحت شش ضلعی را بر مساحت مثلث محاسبه کنید.

۲۷۹ • مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر $12\ cm^2$ است. نقاط F ، K ، M و P را بترتیب روی اضلاع

AB ، BC ، CD و DA طوری انتخاب می‌کنیم که $AF:FB = 2:1$ ، $BK:KC = 1:3$ ، $CM:MD = 1:1$ و $DP:PA = 1:5$ باشد.

مساحت شش ضلعی $AFKCMP$ را محاسبه کنید.

۴ • مساحت اشکال مرکب

۲۸۰ • اضلاع مثلثی برابر 20cm ، 34 cm و 42 cm است. نسبت مساحت دایره محاطی مثلث را بر دایره محاطی آن محاسبه کنید.

۲۸۱ • طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی برابر a است. روی یک ضلع آن به عنوان قطر، دایره ای را رسم می‌کنیم. قسمتی از مساحت مثلث را که در خارج دایره قرار دارد محاسبه کنید.

۲۸۲ • دایره ای در مثلث متساوی الاضلاعی محاط شده است. دایره ای دیگری رسم می‌کنیم. مرکز این دایره بر یکی از رئوس مثلث واقع بوده وشعاع آن نصف ضلع مثلث است. مساحت مقطع این دو شکل چه قسمتی از مساحت مثلث محسوب می‌شود؟

۲۸۳ • دو دایره با شعاعهای a و b ($a > b$) بر هم مماس خارجی هستند. مماس مشترک خارجی آنها را رسم می‌کنیم. مطلوبست: (a) محاسبه مساحت مثلث خمیده حاصله؛ (b) مساحت دایرهٔ محاط در این مثلث.

۲۸۴ • طول ضلع مثلث متساوی الاضلاعی برابر a است. گرانیگاه مثلث مرکز دایره ای به شعاع $\frac{a}{3}$ محسوب می‌شود. مساحت قطعه ای از دایره را پیدا کنید که در خارج دایره قرار دارد.

۲۸۵ • روی اضلاع مربعی به طول ضلع a ، نیمدایره هایی درخارج مربع رسم می‌کنیم بطوریکه اضلاع مربع قطر آنها محسوب می‌شوند. مساحت شکل گلبرگی حاصل را بدست آورید.

۲۸۶ • n دایره مساوی را طوری کنار هم قرار می‌دهیم که در کنارهٔ هر یک از آنها دو دایره بصورت مماس قرار گیرند. هر یک از دایره ها از طریق نقاط تماس به دو کمان تقسیم می‌شوند. کمانهای نزدیک بهم این دایره شکلی را بوجود می‌آورند که محاسبه مساحت آن در هر یک از حالات زیر با در نظر گرفتن شعاع هر یک از دایره ها برابر R ، مطلوب شده است: (a) $n = 3$؛ (b) $n = 4$؛ (c) $n = 6$

۲۸۷ • از نقطه ای واقع بر روی دایره ای به شعاع R دو وتر مساوی که زاویه بین آنها برابر α است رسم می‌کنیم. مساحت قسمتی از دایره را پیدا کنید که بین این دو وتر محصور است.

۲۸۸ • طول ضلع شش ضلعی منتظم $ABCDEK$ برابر a و مرکز آن نیز نقطه O است. سه دایره رسم می‌کنیم: دایره اول به مرکز A از نقاط E و C عبور می‌کند، دایره دوم با مرکز B از نقاط O و C می‌گذرد، و دایره سوم به مرکز K از نقاط O و E عبور می‌کند. مساحت شکلی را که در درون شش ضلعی با این دایره ها محدود شده است محاسبه کنید.

۲۸۹ • دو دایره با شعاع های R و $2R$ و با مراکز O_1 و O_2 طوری ترتیب یافته اند که طول خط المرکزین

آنها $2R\sqrt{3}$ است. مساحت شکلی را پیدا کنید که با پاره‌خط های مماس و کمانهای بزرگتر دایره ها که نقاط تماس را در آن دایره ها بهم وصل می‌کنند محدود شده است.

۲۹۰ ● قاعده مثلثی برابر a وزاویه های مجاور قاعده برابر $15°$ و $45°$ است. رأس مقابل به این قاعده را مرکز دایره‌ای به شعاع ارتفاع مرسوم از این رأس در نظر گرفته و آن دایره را رسم می‌کنیم. مساحت قطعه ای از این دایره را بیابید که در درون مثلث واقع شده است.

۲۹۱ ● دو دایره هم‌شعاع طوری ترتیب یافته اند که طول خط المرکزین آنها برابر شعاع یکی از آنهاست. نسبت مساحت مقطع دو دایره را به مساحت مربع محاط در این مقطع بیابید.

۲۹۲ ● در نیمدایره‌ای با قطر AB نقطه‌دلخواه C روی قطر AB اختیار شده است. در نقطه C عمود CD را بر قطر وارد می‌کنیم. این عمود نیمدایره را در نقطه D قطع می‌کند. روی AC و CB به عنوان قطر دو نیمدایره در درون نیمدایره اول می‌زنیم. ثابت کنید که مساحت شکل محصور با این سه نیمدایره با مساحت دایره رسم شده بر روی قطر CD برابر است.

۲۹۳ ● در مثلث ABC، $\angle A = \alpha$، $\angle B = \beta$ و $AC = b$ است. ارتفاعات AD و BE همدیگر را در نقطه H قطع می‌کنند. دایره‌ای را بر مثلث HDE محیط می‌کنیم. مساحت مقطع دایره و مثلث را بیابید.

۲۹۴ ● n ضلعی منتظمی با طول ضلع a مفروض است. n دایره را در درون این n ضلعی طوری رسم می‌کنیم که هر یک از آنها بر دو دایره و یک ضلع n ضلعی مماس باشد. مساحت «شکل ستاره ای» تشکیل شده در درون n ضلعی را بیابید.

۲۹۵ ● n ضلعی منتظمی با طول ضلع a مفروض است. n دایره را در درون این n ضلعی طوری رسم می‌کنیم که هر یک از آنها بر دو دایره و دو ضلع مجاور از n ضلعی مماس باشد. مساحت «شکل ستاره ای» درون n ضلعی را محاسبه کنید.

۵ ● مسائل گوناگون

۲۹۶ ● مساحت مثلثی برابر $16\ cm^2$ و میانه های m_a و m_b بترتیب برابر $16cm$ و $4\ cm$ است. ثابت کنید که این میانه ها متعامد هستند.

۲۹۷ ● نقطه دلخواهی در درون n ضلعی منتظمی اختیار شده است. از این نقطه عمودهایی را بر اضلاع و یا امتداد آنها رسم می‌کنیم. ثابت کنید که حاصلجمع این عمودها مقدار ثابت است.

۲۹۸ ● از گرانیگاه مثلث متساوی الاضلاع ABC خطی را به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم. در درون مثلث روی این خط نقطه دلخواه M را اختیار کرده و از این نقطه عمودهای MD، ME و MF را بترتیب بر اضلاع AB، AC و BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که: $MD = \frac{1}{2}(ME + MF)$

۲۹۹ ● ثابت کنید که: $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$. در این رابطه h_1، h_2 و h_3 ارتفاعات مثلث و r شعاع

دایره محاطی آن است.

۳۰۰ ● در روی ضلع AC ازمثلث ABC نقطه D را اختیار می‌کنیم. r_1 و r_2 بترتیب شعاع دایره های محاطی مثلث های ABD و BDC است. r نیز شعاع دایره محاطی مثلث ABC است. ثابت کنید که: $r < r_1 + r_2$

۳۰۱ ● مساحت چهارضلعی محدب $ABCD$ برابر 3024 cm^2 وطول اقطار آن برابر 144 cm و 42 cm است. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که میانگاههای اضلاع AB و CD را بهم وصل می‌کند.

۳۰۲ ● مساحت مثلث متساوی الساقینی برابر S وزاویه بین میانه های وارد بر ساق های آن برابر α است. طول قاعده مثلث را محاسبه کنید.

۳۰۳ ● طول دوضلع ازمثلثی برابر a و b و اندازهٔ زاویه بین آنها برابر γ است. مطلوبست محاسبهٔ: (a) نیمساز l_c ؛ (b) ارتفاع h_c

۳۰۴ ● طول قاعده مثلثی برابر a و ارتفاع آن برابر h است. اگر زاویهٔ بین اضلاع جانبی آن برابر α باشد مجموع اضلاع جانبی را محاسبه کنید.

۳۰۵ ● یکی اززوایای مثلثی برابر تفاضل دوزاویه دیگر است. در این مثلث طول ضلع کوچکتر برابر 1 cm و مجموع مساحت های تشکیل شده بر روی دوضلع دیگر دوبرابر مساحت دایرهٔ محیطی مثلث است. طول ضلع بزرگتر مثلث را محاسبه کنید.

۳۰۶ ● ازمثلثی طول دوضلع a و b $(a > b)$ ومساحت S معلوم است. زاویه بین ارتفاع ومیانه مرسوم از رأس مشترک دوضلع معلوم را پیدا کنید.

۳۰۷ ● مساحت S وزاویه های α ، β و γ مثلثی معلوم هستند. طول ارتفاع مرسوم ازرأس α را پیدا کنید.

۳۰۸ ● درمثلث ABC دایره ای محاط شده است که برضلع AB درنقطه M وبرضلع AC درنقطه N مماس است. زاویه BAC وشعاع دایره محاطی را پیدا کنید. با این شرط که $AM = 1 \text{cm}$ ، $BM = 6 \text{ cm}$ و $CN = 7 \text{ cm}$ باشد.

۳۰۹ ● مساحت مستطیل $ABCD$ برابر 48 cm^2 وقطرهای آن نیز معادل 10 cm است. نقطه O به فاصله 13 cm ازرئوس B و D قرار دارد. فاصله نقطه O را از دورترین رأس مستطیل محاسبه کنید.

۳۱۰ ● طول های اضلاع مثلثی با اندازه های a ، b و c یک تصاعد حسابی افزایشی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که $ac = 6Rr$ است. در این رابطه R و r بترتیب شعاع دایره های محیطی ومحاطی است.

۳۱۱ ● طول قاعده های ذوزنقه ای برابر a و b است. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که ذوزنقه را به دو قطعه هم ارز تقسیم می‌کند وبا قاعده ها موازی بوده وبا دوضلع جانبی ذوزنقه محصور شده است.

۳۱۲ ● در ذوزنقه $ABCD$ ، در مورد یکی از قاعده ها $AD = BC = 12 \text{ cm}$ را داریم. نقطه M را روی امتداد BC در طرف نقطه C طوری اختیار می‌کنیم که خط AM روی ذوزنقه مثلثی بوجود آورد ومساحت

این مثلث معادل یک سوم مساحت ذوزنقه باشد. طول پاره‌خط CM را محاسبه کنید.

۳۱۳ ● ارتفاعات AD ، CE در مثلث منفرجة‌الزاویه ABC را از رئوس A و C رسم می‌کنیم. می‌دانیم که مساحت مثلث ABC برابر $18\ \text{cm}^2$ ، مساحت مثلث BDE برابر $2\ \text{cm}^2$ وطول پاره‌خط DE برابر $2\sqrt{2}\ \text{cm}$ است. شعاع دایره محیطی مثلث ABC را محاسبه کنید.

۳۱۴ ● ارتفاعات AD و CE از مثلث منفرجة‌الزاویه ABC از رئوس A و C رسم شده‌اند. می‌دانیم که مساحت مثلث ABC برابر $64\ \text{cm}^2$ و مساحت مثلث BDE برابر $16\ \text{cm}^2$ است. طول پاره‌خط DE را محاسبه کنید، با این شرط که شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر $16\sqrt{3}\ \text{cm}$ باشد.

۳۱۵ ● روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC با مساحت $6\ \text{cm}^2$ نقاط K و M را بترتیب طوری انتخاب می‌کنیم که $AK:BK = 2:3$ و $AM:CM = 5:3$ باشد. خطوط CK و BM همدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند. اگر فاصله P تا خط AB برابر $1.5\ \text{cm}$ باشد طول AB را محاسبه کنید.

۳۱۶ ● در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ نیمساز AD را رسم می‌کنیم. اگر $S_{\Delta ABD} = S_1$ و $S_{\Delta ADC} = S_2$ باشد AC را پیدا کنید.

۳۱۷ ● در مثلث ABC ، نقطه H مرکز ارتفاعی است. اگر $AB = 13\ \text{cm}$ ، $BC = 14\ \text{cm}$ و $AC = 15\ \text{cm}$ باشد طول پاره‌خط AH را پیدا کنید.

۳۱۸ ● مرکز دایره محاطی در مثلثی را به رئوس مثلث وصل می‌کنیم. درنتیجه سه مثلث بدست می‌آید که مساحت های آنها برابر $4\ \text{cm}^2$ ، $13\ \text{cm}^2$ و $15\ \text{cm}^2$ می‌باشند. طول اضلاع مثلث اصلی را بیابید.

۳۱۹ ● در مثلث ABC می‌دانیم که $BC:AC = 3$ و $\angle C =$ ۲ْ است. روی AB نقاط D و K را طوری اختیار می‌کنیم که $\angle ACD = \angle DCK = \angle KCB$ باشد. نسبت $CD:CK$ را محاسبه کنید.

۳۲۰ ● در مثلث ABC میانه BD رسم شده است. اگر $AB = 2$ ، $AC = 6$ و $\angle BAC = 60^\circ$ باشد نسبت شعاع دایره محیطی مثلث ABD را بر شعاع دایره محاطی مثلث ABC محاسبه کنید.

۳۲۱ ● در مثلث ABC می‌دانیم که $AC:BC = 1:3$ و $\angle ACB = \arctan \frac{\sqrt{5}}{2}$ است. روی ضلع AC نقطه D را طوری اختیار می‌کنیم که $AC = CD$ باشد. نسبت مساحت دایره محیطی مثلث ACD را بر مساحت دایره محاطی مثلث ABD محاسبه کنید.

بخش ۵ ● تبدیلات هندسی

در اینجا مفاهیم تقارن مرکزی و نیز ترکیب تقارن های مرکزی را بوسیله مثال هایی مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

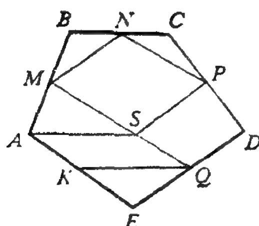
مثال ۱ ● از نقطه ای واقع در درون دایره ای وتری را رسم می‌کنیم که توسط نقطه مزبور نصف شود.

حل ● دایره متقارنی را نسبت به دایره مزبور حول نقطه مفروض رسم می‌کنیم. وتر مشترک دو دایره، وتر مطلوب خواهد بود.

مثال ۲ ● پنج ضلعی ای رسم کنید که میانگاه های اضلاع آن معلوم است.

حل ● میانگاه های اضلاع پنج ضلعی را با M، N، P، Q و K نشان می‌دهیم. نقطه دلخواه A را اختیار کرده و ترکیب تقارن های مرکزی $Z_M \circ Z_N \circ Z_P \circ Z_Q \circ Z_K$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

این ترکیب نسبت به نقطه A چه کاری انجام می‌دهد؟ اگر این ترکیب را با δ نشان دهیم آنگاه $\delta(A) = A$ خواهد بود (شکل ۷۲). اگر $Z_P \circ Z_N \circ Z_M (A) = Z_S (A)$ فرض شود آنگاه $Z_K \circ Z_Q \circ Z_S (A) = A$ خواهد بود. متوازی الاضلاع های $MNPS$ و $SQKA$ را رسم می‌کنیم و پنج ضلعی مطلوب بدین ترتیب بدست می‌آید. دو مثال از کاربرد تقارن محوری را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.



شکل ۷۲

مثال ۳ ● دو دایره ω_1 و ω_2 و خط مستقیم l مفروض است. یک مثلث متساوی الاضلاع را طوری رسم کنید که دو رأس آن روی دو دایره و رأس سوم آن نیز متعلق به خط مفروض باشد (شکل ۷۳).

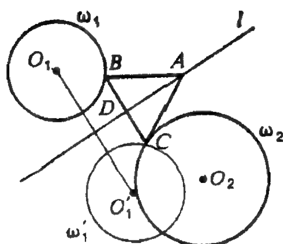
حل ● فرض کنید که $\triangle ABC$، مثلث مطلوب باشد. از آنجا که ارتفاع AD از مثلث متساوی الاضلاع ABC به خط l تعلق دارد از اینرو نقاط B و C نسبت به این خط متقارن بوده و روی دایره های مفروض ω_1 و ω_2 واقع خواهند بود.

از آنجا که نقطه C به دایره ω_2 متعلق بوده و نسبت به خط l متقارن نقطه B از دایره ω_1 است از اینرو نقطه C نیز به تصویر متقارن دایره ω_1 نسبت به خط l متعلق خواهد بود. درنتیجه، C نقطه مشترک دایره ω_2 و تصویر دایره ω_1 نسبت به محور S_l خواهد بود. بدین ترتیب با رسم دایره ω_1' که متقارن دایره ω_1 نسبت به محور l است، نقطه C بدست می‌آید. نقطه B تصویر متقارن نقطه C نسبت به محور تقارن l بوده و تصویر نقطه A نسبت به این محور نیز بر روی خود منطبق می‌شود.

بنابراین برای رسم مثلث مطلوب به ترتیب زیر باید عمل کنید: (1) تصویر دایره ω_1 را نسبت به محور تقارن S_l پیدا کنید؛ (2) نقاط تقاطع دایره های ω_1' و ω_2 را بیابید؛ (3) روی دایره ω_1 تصاویر نقاط تلاقی دایره های ω_1' و ω_2 را بدست آورید؛ (4) مثلث متساوی الاضلاع ABC را رسم کنید که رأس A آن نیز به خط S_l متعلق است.

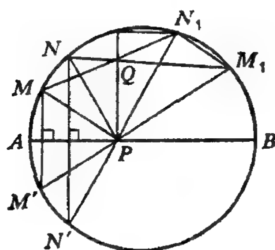
اگر دایره های ω_1' و ω_2 متقاطع باشند در آنصورت مسئله چهار جواب خواهد داشت. اگر دایره های ω_1' و ω_2 بر هم مماس باشند مسئله دو جواب پیدا می‌کند. در صورت انطباق دایره ω_1' بر دایره ω_2 مسئله دارای بینهایت جواب خواهد شد. در صورت فقدان نقطه تقاطع برای دایره های ω_1' و ω_2 مسئله فاقد جواب

می‌شود.



شکل ۷۳

مثال ٤ ● روی قطر AB از نیمدایره ای، نقطه P و روی محیط آن نقاط M، M_1 و N، N_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle MPA = \angle M_1PB$ و $\angle NPA = \angle N_1PB$ باشد.
ثابت کنید که نقطه Q، محل تلاقی وترهای MN_1 و M_1N به خط عمود مرسوم از P بر قطر AB متعلق است (شکل ۷٤).



شکل ۷٤

حل ● M' و N' متقارن نقاط M و N را نسبت به خط AB پیدا می‌کنیم. نقاط M'، P و M_1 روی یک خط، و نقاط N'، P و N_1 نیز روی یک خط دیگر قرار دارند. دایره ای را می‌توان بر چهارضلعی PQN_1M_1 محیط کرد. از اینرو $\angle QPN_1 = \angle N_1M_1Q$ خواهد بود. حال چهارضلعی $PQNM$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که دارای همان ویژگی بالاست: $\angle NPQ = \angle NMQ$. از تساوی مثلث های NMQ و N_1M_1Q نتیجه می‌شود که $\angle NPQ = \angle N_1PQ$ و $PQ \perp AB$ است.

مثال ۵ ● مثلث متساوی الاضلاعی رسم کنید که یک رأس آن بر نقطه معین A و دورأس دیگر روی دو دایره معلوم قرار داشته باشد.

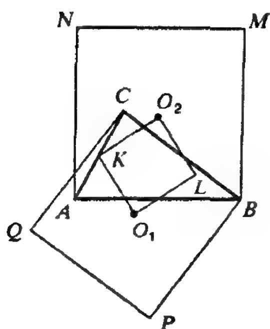
حل ● یکی از دایره ها را حول مرکز دوران A و با زاویه $60°$ دوران می‌دهیم. نقطه تلاقی دایره دیگر با دایره رسم شده رأس دوم مثلث مطلوب خواهد بود.

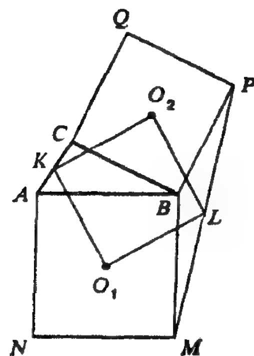
مثال ٦ ● روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC مربعات $ABMN$ و $BCQP$ را رسم می‌کنیم. مرکز آنها را با O_1 و O_2، میانگاه ضلع AC را با K و میانگاه پاره‌خط MP را با L نشان می‌دهیم. ثابت کنید که چهارضلعی O_1LO_2K یک مربع است.

حل ● حالتی را در نظر بگیرید که مربعها در بیرون مثلث ABC رسم شوند.

توجه دارید که ترکیب $R_{O_1}^{270°} \circ R_{O_2}^{270°}$ نقطه A را به نقطه C انتقال داده و از اینرو $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°} = R_K^{180°}$ خواهد بود. از اینرو نتیجه می‌شود که مثلث O_1O_2K یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. بطریق مشابه $R_{O_2}^{90°} \circ R_{O_1}^{90°} = R_L^{180°}$ بوده و از اینرو مثلث O_1O_2L نیز قائم‌الزاویه متساوی الساقین ($\angle L = 90°$) خواهد بود. بنابراین O_1LO_2K یک مربع خواهد بود (شکل ۷۵a).

درحالتی که مربع ها به سوی داخل مثلث رسم می‌شوند نیز مسئله به روش مشابهی حل می‌شود (شکل ۷۵b).



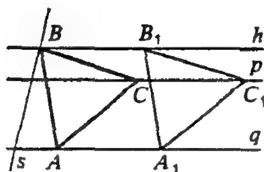


شکل ۷۵

درذیل چند مثال در مورد کاربرد «انتقال» مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۷ ● دو خط موازی p و q را خط سوم s قطع کرده است. مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع معین را طوری رسم کنید که رئوس آن به خطوط p ، q و s متعلق باشد (شکل ۷۶).

حل ● از نقطه اختیاری A_1 روی خط q دایره ای به شعاع برابر با طول ضلع مثلث رسم می‌کنیم. این دایره خط p را در نقطه C_1 قطع می‌کند. مثلث متساوی الاضلاع $A_1B_1C_1$ را رسم می‌کنیم. از نقطه B_1 خط مستقیم h را به موازات p رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع خطوط h و s را با B نشان می‌دهیم. آنگاه مثلث $A_1B_1C_1$ را به‌اندازه $\mathbf{v}$ که برابر $\mathbf{v}=\overrightarrow{B_1B}$ است انتقال می‌دهیم. مسئله می‌تواند دارای دو جواب، یک جواب و یا فاقد جواب باشد.

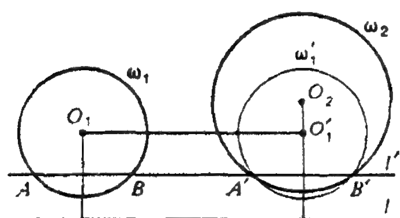


شکل ۷۶

مثال ۸ ● دو دایره ω_1 و ω_2 و خط مستقیم l مفروض اند. خط مستقیمی به موازات خط l طوری رسم

کنید که دایره های ω_1 و ω_2 روی آن وترهای مساوی درست کنند (شکل ۷۷)

حل ● فرض کنید که خط l' روی دایره های مفروض وترهای مساوی AB و $A'B'$ را جدا کند. در این حالت نقاط A و A'، B و B' را می‌توان متناظر به انتقال $T_{\overrightarrow{O_1O'_1}}$ مورد ملاحظه قرار داد که در آن $\overrightarrow{O_1O'_1}$ برداری است که مبدأ آن O_1 یعنی مرکز دایره ω_1 است. در اینصورت O'_1 مرکز دایره ω_1 خواهد بود. بدلیل اینکه نقطه A' تصویر نقطه A از دایره ω_1 است از اینرو نقطه A' به تصویر ω'_1 متعلق خواهد بود.



شکل ۷۷

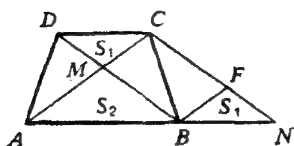
بنابراین نقطه A'، نقطه مشترک دایره های ω'_1 و ω_2 در انتقال با $T_{\overrightarrow{O_1O'_1}}$ خواهد بود.

در رسم نقطه A'، پیش نگار آن را روی دایره ω_1ـ پیدا می‌کنیم و آنگاه خط AA' ، همان خط مطلوب خواهد بود. اگر دایره ω'_1 بر دایره ω_2 منطبق باشد مسئله دارای بینهایت جواب خواهد بود. در همهٔ حالات دیگر مسئله بیش از یک جواب ندارد.

در مثال های زیر چگونگی کاربرد «انتقال متجانس» بررسی می‌شود.

مثال ۹ ● در ذوزنقه $ABCD$ اقطار AC و BD در نقطه M همدیگر را قطع می‌کنند (AB و CD قاعده های ذوزنقه هستند). مساحت های مثلث های ABM و CDM را با S_1، S_2 و مساحت ذوزنقه را با S نشان می‌دهیم.

ثابت کنید که بین این مساحت ها رابطه $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ برقرار است (شکل ۷۸).



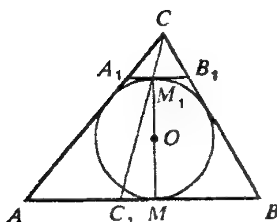
شکل ۷۸

حل ● محل تلاقی خط AB و خط مآر بر C به موازات DB را با N نشان می‌دهیم.

مساحت مثلث ACN با S ، مساحت ذوزنقه مفروض برابراست.

خط BF را به موازات AC رسم می‌کنیم. مساحت مثلث BFN با S_1، مساحت مثلث DMC برابر است. مثلث‌های AMB و BFN با نسبت های k_1 و k_2 مجانس مثلث ACN هستند و بین این نسبت ها رابطه $k_1 + k_2 = 1$ برقرار است. ولی $k_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$ و $k_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$ را داریم و از اینرو $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ خواهد بود.

مثال ۱۰ ● در مثلث ABC دایره ای محاط شده است که بر ضلع AB در نقطه M مماس است. نقطه M_1 را انتهای قطری از این دایره در نظر می‌گیریم که انتهای دیگر آن بر نقطه M منطبق است. ثابت کنید خط CM_1 خط AB را در نقطه C_1 قطع می‌کند بطوریکه $AC + AC_1 = BC + BC_1$ را داریم.
(شکل ۷۹)



شکل ۷۹

حل • بر دایره مماسی در نقطه M_1 رسم می‌کنیم و این مماس AC را در A_1 و BC را در B_1 قطع می‌کند. آنگاه بدیهی است که $CA_1 + A_1M_1 = CB_1 + B_1M_1$ خواهد بود.
همچنین از این حقیقت که مثلث های $A_1B_1C_1$ و ABC متجانس هستند استفاده می‌کنیم. دلیل این امر این است که AB و A_1B_1 بر قطر MM_1 عمود بوده و از اینرو $A_1B_1 \parallel AB$ خواهد بود.

۱ • تقارن نسبت به یک نقطه

۳۲۲ • یک خط مستقیم، یک پاره‌خط و نقطه O مفروض است. پاره‌خطی را طوری رسم کنید که نقاط انتهایی آن به خط مستقیم و پاره‌خط مفروض متعلق بوده و نقطه O وسط آن باشد.

۳۲۳ • در مثلث ABC میانه های AA_1، BB_1 و CC_1 را که در نقطه M متقاطع هستند رسم می‌کنیم. نقاط P ، Q و R میانگاه پاره‌خط های AM، BM و CM است. ثابت کنید که: $\triangle PQR = \triangle A_1B_1C_1$

۳۲۴ • مثلثی را رسم کنید که طول دوضلع و میانه وارد برضلع سوم آن معلوم است. اگر طول دوضلع مثلث برابر a و b باشد، طول میانهٔ آن در چه محدوده ای تغییر می‌کند؟

۳۲۵ • نقاط M، N و K میانگاه پاره‌خط هایی هستند که یک سر آنها بریکی از رئوس مثلث ABC و سر دیگر آنها بر نقطهٔ تقاطع میانه های این مثلث منطبق است. ثابت کنید مثلثی که رئوس آن محل تلاقی خطوط موازی اضلاع مثلث ABC بوده و نقاط M، N و K روی اضلاع آن قرار دارد با مثلث ABC برابر است.

۳۲۶ • دو دایره و نقطه P مفروض اند. متوازی الاضلاعی را طوری رسم کنید که رئوس آن به دایره های مفروض متعلق بوده و نقطه P محل تلاقی اقطار متوازی الاضلاع باشد.

۳۲۷ • پاره‌خطی از محل تلاقی اقطار متوازی الاضلاع $ABCD$ عبور کرده و روی اضلاع آن پاره‌خط های BE و DF را جدا می‌کند. ثابت کنید این پاره‌خط ها برابر هستند.

۳۲۸ • یک متوازی الاضلاع را به دو قسمت هم ارز تقسیم کنید.

۳۲۹ • دو وتر BA و CD را از دو انتهای قطر BC از دایره‌ای به مرکز O طوری رسم می‌کنیم که BA و CD همدیگر را قطع نکرده و روی دوطرف BC واقع شوند. ثابت کنید که OA و OD به یک خط متعلق بوده و $OA = DO$ است.

۳۳۰ • یک شش ضلعی را که اضلاع متقابل آن موازی هستند بر یک دایره محیط کرده ایم. ثابت کنید که اضلاع متقابل آن باهم مساوی هستند.

۳۳۱ • اضلاع متقابل شش ضلعی محدب $ABCDEF$ دوبدو موازی و مساوی هستند. مساحت مثلث ACE چه قسمتی از مساحت شش ضلعی است؟

۳۳۲ • نقاط A و B روی یک دایره و نقطه M روی یک خط مفروض است. روی دایره نقطه X را طوری پیدا کنید که خطوط AX و BX خط l را در نقاط هم فاصله از M قطع کنند.

۳۳۳ • از نقطه l که روی اضلاع مثلث ABC قرار ندارد قاطعی را طوری رسم کنید که مثلثی با حداقل مساحت ممکنه بدست آید.

۳۳۴ • بر دایره ای، یک هشت ضلعی محیط شده است و اضلاع متقابل این هشت ضلعی دوبدو موازی هستند. ثابت کنید که اضلاع متقابل آن دوبدو مساوی هستند.

۳۳۵ • مثلث ABC و نقطه X مفروض است. متوازی الاضلاع $BXCY$ و سپس متوازی الاضلاع $YXAZ$ را رسم کنید. ثابت کنید که تبدیل متجانس نقطه X را به نقطه Z انتقال می‌دهد. نسبت و مرکز این تجانس را بیابید.

۳۳۶ • در یک چهارضلعی، متوازی الاضلاعی را طوری محاط کنید که دو رأس آن ثابت و به (a) اضلاع مقابل، (b) اضلاع مجاور چهارضلعی متعلق باشد.

۳۳۷ • میانه CM از مثلث ABC با اضلاع AC و BC بترتیب زاویه های α و β تشکیل می‌دهد. اگر $AC < BC$ باشد کدامیک از این زاویه ها بزرگتر از دیگری است؟

۲ • تقارن نسبت به خط مستقیم

۳۳۸ • یک پنج ضلعی را طوری رسم کنید که: (a) یک محور تقارن؛ (b) بیش از یک محور تقارن داشته باشد.

۳۳۹ • از نقطه معینی خطی را طوری رسم کنید که دو خط مفروض را با زاویه های مساوی قطع کند.

۳۴۰ • مثلثی را رسم کنید که طول یک ضلع، تفاضل دوضلع دیگر، و زاویه بین ضلع اول و بزرگترین دوضلع دیگر معلوم باشد.

۳۴۱ • مثلثی را رسم کنید که طول دوضلع و تفاضل دو زاویه مقابل به آنها معلوم است.

۳۴۲ • نقطه M در درون زاویه منفرجه ای مفروض است. مثلث MAB را طوری رسم کنید که رئوس A و B آن روی اضلاع زاویه واقع شده و محیط آن مقدار حداقل ممکنه را داشته باشد.

۳۴۳ • چهارضلعی محدب $ABCD$ را طوری رسم کنید که فقط دارای یک محور تقارن BD باشد.

۳۴۴ • آیا می‌توان پنج ضلعی ای رسم کرد که قطری از آن روی یک محور تقارن قرار بگیرد.

۳۴۵ • ثابت کنید که در یک چند ضلعی منتظم با تعداد رئوس فرد که دارای چند محور تقارن است

هیچیک از اقطار نمی‌تواند محورهای تقارن قرار بگیرند.

۳۴۶ • مثلثی را رسم کنید که یک زاویه، یک ضلع مجاور به این زاویه و تفاضل دوضلع دیگر از آن معلوم است.

۳۴۷ • مثلثی را رسم کنید که مقدار ناصفر تفاضل دوزاویه و طول دوضلع مقابل به این زوایا از آن معلوم است.

۳۴۸ • دو دایره متحدالمرکز مفروض اند. یک لوزی (متفاوت با مربع) رسم کنید که در آن (a) دو رأس به یک دایره و دو رأس دیگر به دایره دیگر؛ (b) سه رأس به یک دایره و یک رأس آن، به دایره دیگر متعلق باشد.

۳۴۹ • مثلث ABC را رسم کنید که سه عمود منصف آن یعنی p ، q و r معلوم هستند.

۳۵۰ • در دایره مفروض مثلثی را محاط کنید که اضلاع آن با سه خط معین موازی باشند.

۳۵۱ • بر مثلث ABC دایره‌ای محیط شده است که نیمساز زاویه C را در نقطه M قطع می‌کند. عمود HD را از مرکز ارتفاعی H مثلث بر نیمساز زاویه عبور می‌دهیم بطوریکه نقطه D به l_C متعلق باشد. ثابت کنید که: $CD:CM = \cos C$

۳۵۲ • در دایره‌ای به مرکز O چهارضلعی $ABCD$ محاط شده است. خط های OM ، ON و OP و OQ را طوری رسم می‌کنیم که M، N، P و Q میانگاه اوتار AB ، BC ، CD و DA باشد. ثابت کنید که: $\angle MON + \angle COD = 180^\circ$ یا $\angle MON = \angle POQ$

۳۵۳ • چهارضلعی $ABCD$ بر دایره‌ای به مرکز O محیط شده است.
ثابت کنید که: $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$

۳۵۴ • در دایره مفروضی یک پنج ضلعی را محاط کنید که اضلاع آن با پنج خط معینی موازی باشند.

۳۵۵ • روی میز مستطیل شکلی، توپی قرار دارد. در چه جهتی بایستی به آن ضربه بزنیم تا بعد از برخورد به دیواره های میز دوباره در مسیر حرکت اولیه، قرار بگیرد؟

۳۵۶ • ثابت کنید که نقطه تلاقی امتداد اضلاع جانبی یک ذوزنقه متساوی الساقین، نقطه تلاقی قطرها و نیز میانگاههای قاعده های آن روی یک خط مستقیم قرار دارد.

۳۵۷ • ثابت کنید که خط واصل میانگاههای دو وتر موازی در دایره از مرکز آن می‌گذرد.

۳۵۸ • دایره F_1 دو دایره متحدالمرکز F_2 و F_3 را بترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید که وترهای AB و CD موازی هستند.

۳۵۹ • سه دایره مساوی دارای یک نقطه مشترک هستند. ثابت کنید که دایره دیگر مارّ بر نقاط تقاطع دیگر این سه دایره با دایره های مفروض مساوی است.

۳۶۰ • روی یک صفحه چهار دایره مساوی در یک نقطه مشترک بوده و برای بار دوم محوری در شش نقطه با همدیگر متقاطع هستند. ثابت کنید که هریک از دایره ها از سه نقطه از شش نقطه مزبور عبور

می‌کنند.

۳۶۱ • روی صفحه‌ای، یک خط و یک نقطه در خارج این خط مفروض اند. مکان هندسی مرکز مثلثی را پیدا کنید که یک رأس بر نقطه و رأس دیگر آن روی خط مفروض قرار دارد.

۳۶۲ • بر روی صفحه‌ای، یک خط مستقیم و نقطه‌ای در خارج آن مفروض است. مکان هندسی رأس سوم مثلثی را بیابید که یک رأس آن بر روی نقطه و رأس دیگر آن بر روی خط مستقیم مفروض قرار دارد.

۳ • دوران

۳۶۳ • مربع $ABCD$ را رسم کنید که O مرکز آن و دو نقطه M و N متعلق به اضلاع AB و AC از آن معلوم هستند و $OM \neq ON$ است.

۳٦٤ • مثلث متساوی الاضلاعی را طوری رسم کنید که یک رأس آن بر نقطهٔ معلوم O و دو رأس دیگر آن بر دو دایره معلوم دیگر منطبق باشد.

۳٦٥ • از نقطه واقع در درون دایره‌ای وتری با طول معلوم رسم کنید.

۳٦٦ • روی اضلاع BC ، CA و AB از مثلث متساوی الاضلاعی بترتیب نقاط N، M و P مفروض هستند. می‌دانیم که $BM{:}MC = CN{:}NA = AP{:}PB = k$ است. (a) ثابت کنید که ABC یک مثلث متساوی الاضلاع است؛ (b) اگر $BC = a$ و $k = 2$ باشد MN را محاسبه کنید.

۳٦۷ • روی اضلاع BC ، CD ، DA و AB از مربع $ABCD$ نقاط P، Q، R، S بترتیب مفروض هستند. می‌دانیم که $BP{:}PC = CQ{:}QD = DR{:}RA = AS{:}SB = h$ است.

(a) ثابت کنید $PQRS$ یک مربع است. (b) اگر $AB = a$ و $h = 3$ باشد PQ را محاسبه کنید.

۳٦۸ • روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC دو مربع هم سوی $ABMN$ و $BCOP$ را رسم می‌کنیم. مراکز این مربعات را با O_1 و O_2 نشان می‌دهیم. میانگاه ضلع AC را K و میانگاه پاره‌خط MP را L می‌نامیم. ثابت کنید که چهارضلعی O_1LO_2K یک مربع است.

۳٦۹ • مثلث های متساوی الاضلاع ACB_1 و BCA_1 را روی اضلاع AC و BC از مثلث ABC و در خارج آن رسم می‌کنیم. اگر M میانگاه ضلع AB و O مرکز مثلث ACB_1 باشد زوایای مثلث MA_1O را بیابید.

۳۷۰ • روی امتداد اضلاع مثلث قائم الزاویه ABC پاره‌خط های AD و AE را بترتیب برابر اضلاع AB و AC از مثلث ABC جدا می‌کنیم. ثابت کنید خطی که شامل میانه AM از مثلث ABC است بر پاره‌خط DE عمود است.

۳۷۱ • مربع $ABCD$ مفروض است. در مرکز این مربع دو خط را (متفاوت با اقطار AC و BD) بر هم

عمود رسم می‌کنیم. از تقاطع این خطوط با مربع چهار چهارضلعی بدست می‌آید. ثابت کنید این چهارضلعی ها باهم مساوی هستند.

۳۷۲ • از مرکز O مربوط به مثلث متساوی الاضلاع ABC دوخط مستقیم را رسم می‌کنیم که زاویه بین آنها $60°$ است. ثابت کنید که قطعات این دوخط واقع در درون مثلث دوبدو باهم مساوی اند.

۳۷۳ • مثلث متساوی الاضلاعی را طوری رسم کنید که یکی از رئوس آن بر نقطه P، رأس دیگر به خط a ورأس سوم به خط b متعلق باشد.

۳۷۴ • مربع های $ABNM$ و $ACQP$ را روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC ودرخارج آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که MC بر BP عمود است.

۳۷۵ • دومربع هم‌سوی $MPOR$ و $MUVW$ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که دوخط PU و RW متعامد هستند.

۳۷۶ • روی اضلاع AB و BC ازمثلث ABC مربعاتی را با مراکز D و E طوری رسم می‌کنیم که نقاط C و D دریک طرف AB، ونقاط A و E در دوطرف ضلع BC قرارداشته باشد. ثابت کنید که زاویه بین خطوط AC و DE برابر $45°$ است.

۳۷۷ • مربع $ABCD$ را رسم کنید. مرکز O ودونقطه M و N متعلق به اضلاع BC و CD از این مربع معلوم هستند و $OM \neq ON$ است.

٤ • انتقال

۳۷۸ • چهارنقطه A، B، C و D مفروض اند. چهارخط موازی a، b، c و d بترتیب طوری از این نقاط عبوردهید که فاصلهٔ بین خطوط a و b با فاصله بین خطوط c و d برابر باشند.

۳۷۹ • ذوزنقه ای را رسم کنید که اقطار وزاویه بین آنها ونیز طول یک ضلع از ذوزنقه معلوم باشد.

۳۸۰ • ثابت کنید اگر در ذوزنقه ای خط واصل میانگاه های قاعده ها با امتداد اضلاع جانبی آن زاویه های مساوی تشکیل دهد در آن صورت ذوزنقه مفروض متساوی الساقین خواهد بود.

۳۸۱ • دودایره مساوی درخارج هم در نقطه K مماس هستند. خط قاطعی به موازات خط‌المرکزین، دو دایره را در نقاط A، B، C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که اندازه زاویه AKC مستقل از انتخاب قاطع است.

۳۸۲ • مساحت ذوزنقه ای را با معلوم بودن طول همهٔ اضلاع آن تعیین کنید.

۳۸۳ • روی دایره‌ای با مرکز O نقاط A، B و C طوری انتخاب شده اند که $\angle AOB = \angle BOC = 60°$ است. ثابت کنید که فاصله نقطه B ازقطر دلخواهی ازدایره با مجموع یا قدرمطلق تفاضل فواصل نقاط A و C از این قطر برابر است.

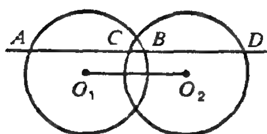
۳۸۴ • ازنقطه M واقع درخارج دایره ω، خط مستقیم m را طوری رسم کنید که دایره ω را در دونقطه

A و B با شرط $AB = BM$ قطع کند.

۳۸۵ ● چهار دایره مساوی ω_1، ω_2، ω_3 و ω_4 از نقطه M عبور کرده و نیز همدیگر را مجموعاً در شش نقطه قطع می‌کنند: A_{12} نقطه تقاطع ω_1 و ω_2، A_{23} نقطه تقاطع دایره‌های ω_2 و ω_3 و ... و A_{43} نقطه تقاطع دایره‌های ω_3 و ω_4 است. ثابت کنید که پاره‌خط های $A_{12}A_{43}$، $A_{23}A_{14}$ و $A_{13}A_{24}$ دارای میانگاه مشترک هستند.

۳۸۶ ● امتداد اضلاع جانبی ذوزنقه ای بر هم عمود هستند. ثابت کنید خط واصل میانگاه‌های قاعده‌ها در این ذوزنقه با نصف تفاضل قاعده ها برابر است.

۳۸۷ ● مجموع قاعده های ذوزنقه ای برابر 21 cm وطول اقطار آن برابر 13 cm و 20 cm است. مساحت این ذوزنقه را محاسبه کنید.



شکل ۸۰

۳۸۸ ● طول خط المرکزین دو دایره متقاطع هم شعاع برابر d است. خطی را که به موازات خط المرکزین رسم کرده‌ایم دایره اول را در A و B و دایره دوم را در C و D قطع می‌کند. طول پاره‌خط AC را محاسبه کنید (شکل ۸۰)

۳۸۹ ● چهارضلعی $ABCD$ را رسم کنید که طول اضلاع و نیز طول پاره‌خط MN از آن معلوم است. این پاره‌خط میانگاه های اضلاع AB و DC را بهم وصل می‌کند.

۳۹۰ ● اقطار ذوزنقه ای با قاعده های a و b بر هم عمود هستند. ارتفاع این ذوزنقه چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۵ ● تبدیل متجانس

۳۹۱ ● ثابت کنید در مثلث ABC، نقطه M محل تلاقی میانه ها، نقطه H محل تلاقی ارتفاعات و O، مرکز دایره محیطی مثلث بر روی یک خط (خط اولر) واقع بوده و $\frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$ است.

۳۹۲ ● زاویه ABC و نقطه M در درون این زاویه مفروض است. از نقطه M خطی را طوری رسم کنید که قطعه ای از این خط که در درون زاویه قرار دارد توسط نقطه M به نسبت $1:2$ تقسیم شود.

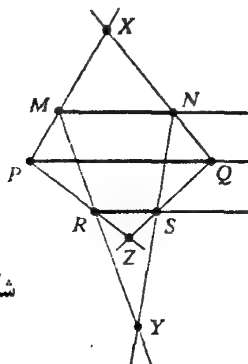
۳۹۳ ● از M نقطه تماس دایره های R و S دو قاطع h و l را طوری رسم می‌کنیم که دایرهٔ R را در نقاط A و B (همچنین در نقطه M) و دایره S را در نقاط C و D قطع کند. ثابت کنید که پاره‌خط های AB و CD موازی هستند.

۳۹۴ ● از نقطه تماس دو دایره خط دلخواهی را عبور می‌دهیم تا دایره ها را قطع کند. ثابت کنید شعاع مرسوم از مراکز دایره‌ها به این نقاط تقاطع باهم موازی هستند.

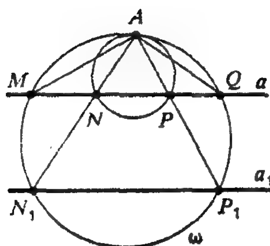
۳۹۵ ● سه پاره‌خط نامساوی MN، PQ و RS را به موازات هم رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقاط تلاقی MP و NQ، MR و NS، PR و QS روی یک خط و نقاط تلاقی MQ و NP، QR و PS، MR و

NS نیز روی یک خط دیگر قرار دارند (شکل ۸۱)

۳۹۶ ● دو دایره در نقطه A مماس داخلی هستند. قاطع a دایره ها را در نقاط M، N، P و Q با همان ترتیبی که در شکل ۸۲ ملاحظه می‌کنید قطع می‌کند. ثابت کنید که: $\angle MAN = \angle PAQ$.



شکل ۸۱



شکل ۸۲

۳۹۷ ● چند پاره‌خط مفروض اند. این پاره‌خط ها در یکی از نقاط انتهایی مشترک بوده و نقاط انتهایی دیگر آنها روی یک خط مستقیم قرار دارند. این پاره‌خط ها را با نسبت های یکسانی تقسیم می‌کنیم. ثابت کنید که نقاط تقسیم آنها روی یک خط قرار دارند.

بخش ۶ ● بردارها

جمع بردارها ● حاصلجمع دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با مختصات a_1، a_2 و b_1، b_2 بصورت بردار $\mathbf{c}$ با مختصات $a_1 + b_1$، $a_2 + b_2$ تعریف می‌شود. یعنی داریم:

$$\mathbf{a}\,(a_1,\ a_2) + \mathbf{b}\,(b_1,\ b_2) = \mathbf{c}\,(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

به ازاء تمام بردارهایی بصورت $\mathbf{a}\,(a_1,\ a_2)$، $\mathbf{b}\,(b_1,\ b_2)$، $\mathbf{c}\,(c_1,\ c_2)$ تساوی های $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ و $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ برقرار هستند.

قاعده مثلث ● در مورد هر سه نقطه A، B و C تساوی $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ برقرار است.

قاعده متوازی الاضلاع ● اگر $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد آنگاه $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ خواهد بود.

ضرب بردار در یک عدد ● ضرب بردار $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ در عدد λ بصورت بردار $(\lambda\mathbf{a}_1,\ \ \lambda\mathbf{a}_2)$ یعنی $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)\,\lambda = (\lambda\mathbf{a}_1,\ \lambda\mathbf{a}_2)$ تعریف می‌شود. طبق تعریف $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)\,\lambda = \lambda\,(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)$ است.

به ازاء هر بردار $\mathbf{a}$ و اعداد λ و μ رابطه $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ برقرار است.

به ازاء بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و عدد λ نیز $\lambda\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ و $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$ را داریم.

جهت بردار $\lambda\mathbf{a}$ به ازاء $\mathbf{a} \neq 0$ با جهت بردار $\mathbf{a}$ با شرط $\lambda > 0$ یکسان بوده و با شرط $\lambda < 0$ با جهت بردار $\mathbf{a}$ مخالف خواهد بود. دو بردار ناصفر درصورتی همخط خوانده می‌شود که بر روی یک خط یا دوخط موازی قرار داشته باشند. اگر $\mathbf{a}\ (a_1,\ a_2) \parallel \mathbf{b}\ (b_1,\ b_2)$ باشد آنگاه $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ خواهد بود. عکس این قضیه نیز درست است. بردار یکه برداری بطول یک واحد است. بردارهای یکه‌ای که در جهت نیم محورهای مختصاتی مثبت قرار دارند بردارهای پایه نامیده می‌شوند. آنها را روی محور x ها با $\mathbf{e}_1\ (1,\ 0)$ و روی محور y ها با $\mathbf{e}_2\ (0,\ 1)$ نمایش می‌دهند. هر برداری مانند $\mathbf{a}\ (a_1,\ a_2)$ را می‌توان به شکل $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ بیان کرد.

حاصلضرب اسکالر (درونی) دوبردار ● حاصلضرب درونی بردار $\mathbf{a}\ (a_1,\ a_2)$ در بردار $\mathbf{b}\ (b_1,\ b_2)$ بصورت عدد $a_1b_1 + a_2b_2$ تعریف می‌شود. روابط $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2,\ \mathbf{a}^2 = |\ \mathbf{a}\ |^2$ را نیز داریم.

در مورد هرسه بردار مانند $\mathbf{a}\ (a_1,\ a_2)$، $\mathbf{b}\ (b_1,\ b_2)$ و $\mathbf{c}\ (c_1,\ c_2)$ تساوی $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\ \mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ برقرار است. زاویه بین دوبردار ناصفر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بصورت زاویه BAC تعریف می‌شود. زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بصورت زاویه بین بردارهایی تعریف می‌شود که با این بردار مساوی بوده و دارای مبدأ مشترک هستند. زاویه بین دو بردار هم جهت برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. حاصلضرب درونی دو بردار با حاصلضرب قدرمطلق آنها در کسینوس زاویه بین آنها برابر است.

اگر $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ باشد آنگاه $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ و با شرایط $\mathbf{a} \neq 0$ و $\mathbf{b} \neq 0$ اگر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ باشد آنگاه $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ خواهد بود.

ساختار جبر برداری، برای حل مسائل گوناگون هندسی ابداع روش خاصی را ممکن می‌سازد. با وجود این باید به خاطر داشته باشیم که این روش کلیت ندارد و می‌تواند در موارد معینی نیز عملی نباشد. در جدول صفحه بعد مثال هایی از کاربرد زبان برداری درصورت بندی و اثبات گزارهٔ هندسی معین یا محاسبهٔ کمیت های هندسی ارائه شده است. خوانندگان توجه داشته باشند که سه مورد اول جدول در بارهٔ مسائل مستوی و سه مورد آخر آن نیز در بارهٔ مسائل متریک بکار گرفته می‌شوند.

استفاده از زبان هندسی اثبات این گزاره ها مطلوب شده است.	با استفاده از زبان برداری کافی است که ثابت کنیم:
$a \parallel b$ (1)	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ، بطوریکه پاره‌خط های AB و CD بترتیب به خطوط a و b تعلق داشته و k نیز یک عدد است. براساس انتخاب AB و CD روابط برداری مختلفی بوجود می‌آیند که از میان آنها رابطهٔ مناسب انتخاب می‌شود.
(2) نقاط A، B و C به خط a تعلق دارند	(a) درستی یکی از تساوی های: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$ یا $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC}$ و یا $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ را اثبات کنید؛ (b) تساوی $\overrightarrow{QC}=p\overrightarrow{QA}+q\overrightarrow{QB}$ را ثابت کنید که در آن $p+q=1$ بوده و Q یک نقطه اختیاری است؛ (c) تساوی $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{AC}=0$ را ثابت کنید بطوریکه در آن $\alpha+\beta+\gamma=0$ بوده و Q یک نقطه اختیاری است.
(3) نقطه C به پاره‌خط AB تعلق دارد بطوریکه $AC:AB=m:n$ است.	به ازاء نقطه معین Q، $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ یا $\overrightarrow{QC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$ است.
$a \perp b$ (4)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ، بطوریکه نقاط A و B به خط a و نقاط C و D به خط b تعلق دارند.
(5) محاسبه طول یک پاره‌خط	(a) دو بردار پایه ناهمخط (یا سه بردار ناهم صفحه) را که طول ها و زاویهٔ بین آنها معلوم است اختیار کنید. (b) برداری را که طول آن محاسبه شده است بر روی این بردارها تجزیه کنید. (c) مربع اسکالر این بردار را با استفاده از فرمول $\mathbf{a}^2=\|\mathbf{a}\|^2$ پیدا کنید.
(6) محاسبه اندازه یک زاویه	(a) دو بردار پایه ناهمخط را که نسبت طول ها و نیز زاویه بین آنها معلوم است اختیار کنید. (b) بردارهایی اختیار کنید که زاویه مطلوب را معین سازند و این بردارها را روی بردارهای پایه تجزیه کنید. (c) $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$ محاسبه کنید.

۱ • مسائل مستوی

چند نوع مسئله مستوی را ذیلاً برگزیده ایم تا با استفاده از بردارها حل کنیم. (مسائلی را در نظر گرفته ایم که صورت بندی آنها مفاهیم جبر برداری را شامل نیستند).

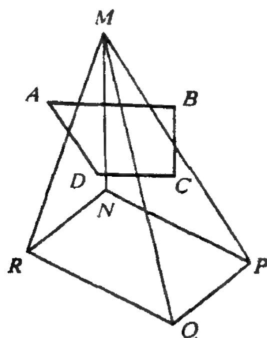
در نوع اول این مسائل، اثبات توازی پاره خط ها و خطوط مستقیم معینی مطرح است. برای حل این نوع مسائل ضروری است که همخطی بردارهای ارائه شده توسط پاره خط های مفروض یعنی $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$ که در آن k یک عدد است، ثابت شود. ذیلاً چند مثال از این نوع مسائل را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

مثال ۱ • در صفحه ای چهارضلعی $ABCD$ و نقطه M مفروض است. ثابت کنید نقاطی که متقارن میانگاه های اضلاع چهارضلعی نسبت به نقطه M هستند رئوس یک متوازی الاضلاع می‌باشند.

حل • چهارضلعی مفروض $ABCD$ (شکل ۸۳) و نقاط متقارن میانگاه های پاره خط های AB، BC، CD و DA نسبت به نقطه M را با N، P، Q و R نشان می‌دهیم. طبق قاعده متوازی الاضلاع،

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\text{، }\ \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\text{،}$$
$$\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}$$

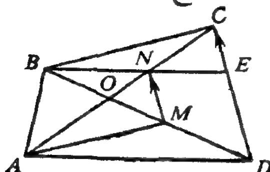
را داریم. طبق تعریف تفاضل دو بردار $\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP}$ است. بدلیل $\overrightarrow{NR}-\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN})-(\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP})$ وبا استفاده از تساوی های اولیه به $\overrightarrow{NR}-\overrightarrow{PQ}=0$ یعنی $\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{PQ}$ می‌رسیم. بطریق مشابه $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{RQ}$ اثبات می‌شود. نتیجه $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{RQ}$ و $\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{PQ}$ بوده و این امر به معنی متوازی الاضلاع بودن چهارضلعی $NPQR$ است.



شکل ۸۳

مثال ۲ • چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. خط مستقیمی را که از رأس A به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم قطر BD را در نقطه M قطع می‌کند. خط مستقیم مارّ بر رأس B به موازات ضلع AD نیز قطر AC را در نقطه N قطع می‌کند. (شکل ۸۴)

ثابت کنید که: $MN \parallel DC$



شکل ۸۴

حل ● برای حل مسئله کافی است که همخطی بردارهای $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{MN}$ را ثابت کنیم. یعنی بایستی ثابت کنیم که $\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{MN}$ است بطوریکه در این رابطه k یک عدد است. برای اطمینان یافتن از همخط بودن بردارهای $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{MN}$ هر یک از آنها را برحسب بردارهای دیگر بیان می‌کنیم. بدین ترتیب $\overrightarrow{DC}$ را برحسب بردارهای $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ و بردار $\overrightarrow{MN}$ را برحسب بردارهای $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ بیان می‌کنیم که در آنها O نقطه تلاقی خطوط مستقیم AC و BD است. از طرف دیگر بردارهای $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{ON}$ را نیز می‌توان برحسب بردار $\overrightarrow{AO}$ بیان کرد، درحالیکه بردارهای $\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OM}$ قابل بیان برحسب بردار $\overrightarrow{BO}$ هستند.
اگر فرض کنید که $AO:OC = p:q$ و $BO:OD = m:n$ **(1)** است آنگاه بردار $\overrightarrow{DC}$ را برحسب $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{BO}$ می‌توان بیان کرد:

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\frac{q}{p}\overrightarrow{AO}-\frac{n}{m}\overrightarrow{BO}=\frac{1}{mp}(mq\overrightarrow{AO}-np\overrightarrow{BO})$$

از طرف دیگر از توازی پاره‌خط های BE و AD نتیجه می‌شود که: $AO:ON=DO:OB=n:m$ (2)
آنگاه از روی شکل و تساوی های (2) نتیجه می‌شود که: $\overrightarrow{ON}=\frac{m}{n}\overrightarrow{AO}$.
بطریق مشابه از توازی پاره‌خط های AM و BC به $BO:OM=CO:AO=q:p$ و $\overrightarrow{OM}=\frac{p}{q}\overrightarrow{BO}$ وصول می‌یابیم. آنگاه بردار $\overrightarrow{MN}$ را می‌توان برحسب $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{BO}$ بیان کرد:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{p}{q}\overrightarrow{BO}+\frac{m}{n}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{nq}(-np\overrightarrow{BO}+mq\overrightarrow{AO})$$

بنابراین $\overrightarrow{DC}=\frac{nq}{mp}\overrightarrow{MN}$ حاصل می‌شود که از نظر هندسی به معنی توازی پاره‌خط‌های MN و DC است.
در نوع دوم این مسائل اثبات تقسیم پاره‌خطی به نسبت معینی توسط یک نقطه مطرح است. برای اثبات اینکه نقطه C پاره‌خط AB را به نسبت معین $AC:CB = m:n$ تقسیم می‌کند کافی است که: (a) تساوی $\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ یا، (b) تساوی $\overrightarrow{QC}=\frac{n}{n+m}\overrightarrow{QA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{QB}$ اثبات شود. در این رابطه Q نقطه دلخواه است. اثبات کفایت شرط (b) از سهولت برخوردار است.
اگر $\overrightarrow{QC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$ باشد آنگاه $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\overrightarrow{QC}=\frac{1}{m}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{n}\overrightarrow{QB}$، $\frac{1}{m}(\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA})=\frac{1}{n}(\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC})$، $\frac{1}{m}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{n}\overrightarrow{CB}$ بوده و این امر به‌معنی $AC:CB=m:n$ است.
توجه داشته باشید که برای تقسیم پاره‌خط AB بوسیله نقطه C به نسبت $m:n$ شرط (b) ضرورت دارد.
ذیلاً تعدادی از مسائل نوع دوم را حل می‌کنیم.

مثال ۳ ● در چهارضلعی دلخواهی، میانگاه های اقطار را و همچنین میانگاه های دوضلع روبرو را بهم وصل می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط اول در نقطه تقاطع با پاره‌خط دوم نصف می‌شود.

حل ● با روش های مختلفی می‌توان ثابت کرد که نقطه O (شکل ۸۵) وسط پاره‌خط EF است.
به‌عنوان مثال:

(1) ثابت کنید که: $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{QF}$.

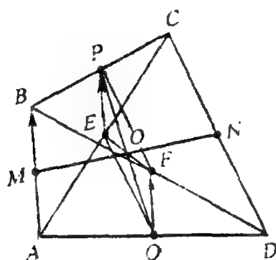
این رابطه به این معنی است که $EPFQ$ متوازی الاضلاع بوده و بدلیل قطر بودن EF این خط از نقطه O عبور کرده و در این نقطه نصف می‌شود؛

(2) ثابت کنید که: $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OF}$

(3) ثابت کنید که: $\overrightarrow{QO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QF})$ یا $\overrightarrow{NO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF})$

(4) ثابت کنید که: $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF})$ یا $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF})$

از بین روشهای فوق روش اول را که ساده‌ترین آنها است مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در مثلث ABC پاره‌خط EP خط واصل میانگاههای دوضلع بوده و از آن $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ را داریم.
در مثلث ABD پاره‌خط QF خط واصل میانگاههای دوضلع بوده و از اینرو $\overrightarrow{QF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ است.
بنابراین $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{QF}$ استنتاج می‌شود و مسئله اثبات می‌گردد.



شکل ۸۵

مثال ٤ • ضلع AD از متوازی الاضلاع $ABCD$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و نقطه تقسیم اول (نقطه K) را به رأس B وصل می‌کنیم (شکل ۸٦). در نقطه تقاطع خط BK با قطر AC، قطر مزبور به چه نسبتی تقسیم می‌شود.

حل • روابط $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$، $\overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$ و $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC}$ را در نظر می‌گیریم. بردار $\overrightarrow{AP}$ را برحسب بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بدوصورت بیان می‌کنیم:

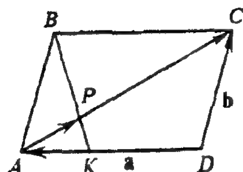
$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \alpha\mathbf{b} - \alpha\mathbf{a} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KP} = -\frac{1}{n}\mathbf{a} + \alpha\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{n}\mathbf{a} + \alpha\left(\frac{1}{n}\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = \quad (2)$$

$$\frac{\alpha - 1}{n}\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

(بدلیل $\triangle BPC \sim \triangle APK$ رابطهٔ $\overrightarrow{KP} = \alpha\overrightarrow{KB}$ را داریم).

از آنجا که فقط یک صورت برای بیان برداری برحسب دو بردار ناهمخط وجود دارد از اینرو:
$-\alpha = \frac{\alpha - 1}{n}$ را داریم که از آن نیز $\alpha = \frac{1}{n+1}$ بدست می‌آید.
این امر به معنی $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AC}$ است و از اینرو به آسانی $AP:PC = 1:n$ استنتاج می‌شود.



شکل ۸۶

مثال ۵ ● روی ضلع AC از مثلث ABC نقطه M را با شرط $AM=\frac{1}{3}AC$ و روی امتداد BC نقطه N را با شرط $BN = CB$ اختیار کرده‌ایم. نقطه P پاره‌خط های AB و MN را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؛ (شکل ۸۷).

حل ● چنین فرض می‌کنیم:

$$NP:PM=\alpha:\beta, \quad AP:PB=\gamma:\delta \qquad (1)$$

بدین ترتیب باید $\alpha:\beta$ و $\gamma:\delta$ را بیابیم. برای این منظور چند معادله که دارای α ، β ، γ و δ هستند تشکیل می‌دهیم. فرض کنید که Q یک نقطه اختیاری در صفحه باشد، آنگاه در مورد پاره‌خط های AB و MN چنین داریم:

$$\overrightarrow{QP}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{QN}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{QM} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{QP}=\frac{\delta}{\gamma+\delta}\overrightarrow{QA}+\frac{\gamma}{\gamma+\delta}\overrightarrow{QB} \qquad (3)$$

تساوی های (2) و (3) دارای پنج بردار متفاوت هستند. تعداد این بردارها را با تبدیل آنها به بردارهای دیگر کاهش می‌دهیم. در مورد پاره‌خط های NC و AC چنین داریم: $\overrightarrow{QB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QC})$

$$\overrightarrow{QM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QC} \qquad (4)$$

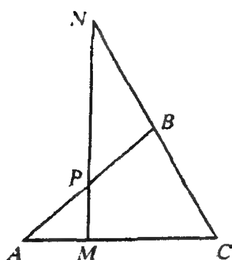
با جایگذاری مقادیر $\overrightarrow{QB}$ و $\overrightarrow{QM}$ از تساوی (4) در تساوی های (2) و (3) چنین حاصل می‌شود:

$$\overrightarrow{QP}=\frac{\delta}{\gamma+\delta}\overrightarrow{QA}+\frac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}\overrightarrow{QN}+\frac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}\overrightarrow{QC} \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{QP}=\frac{2\alpha}{3(\alpha+\beta)}\overrightarrow{QA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{QN}+\frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)}\overrightarrow{QC} \qquad (6)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases}\dfrac{\gamma}{2(\gamma+\beta)}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\\[2mm] \dfrac{\delta}{\gamma+\delta}=\dfrac{2\alpha}{3\alpha+\beta}\\[2mm] \dfrac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}=\dfrac{\alpha}{3(\alpha+\beta)}\end{cases}$$

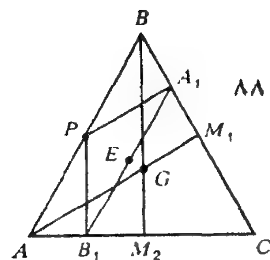


با حل این دستگاه معادلات، $\delta = \gamma$ و $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ حاصل می‌شود.
درنتیجه $AP = BP$ و $NP:PM = 3:1$ را خواهیم داشت.

شکل ۸۷

مسائل نوع دوم را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در این مسائل اثبات تعلق سه نقطه به یک خط راست مطرح می‌شود. اینگونه مسائل به عنوان حالت خاصی از مسائل نوع دوم مطرح است. با وجود این راه حل آنها، ویژگی های خاصی را در ارتباط با کاربرد شرط تعلق سه نقطه به یک خط راست دارا می‌باشد.

مثال ۶ ● در مثلث ABC میانه های AM_1 و BM_2 را رسم کرده ایم. از نقطه P واقع بر روی ضلع AB دو خط به موازات این میانه ها رسم می‌کنیم. این خطوط اضلاع مثلث را در نقاط A_1 و B_1 قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه E میانگاه A_1B_1 و نقطه G محل تلاقی میانه ها روی یک خط مستقیم قرار دارند (شکل ۸۸).



شکل ۸۸

حل ● قسمت حکم مسئله را طوری تغییر می‌دهیم که در حل مسئله بردارها کاربردپذیر شوند. این امر با روشهای زیر ممکن می‌گردد:
(1) تحقیق کنید که $\overrightarrow{EP} = k\overrightarrow{GP}$ است (بردارهای دیگری را نیز می‌توان اختیار کرد)؛
(2) به ازاء نقطه معین Q تساوی $\overrightarrow{QE} = k\overrightarrow{QP} + (1-k)\overrightarrow{QC}$ را بر پا سازید (شرط تعلق سه نقطه به یک خط مستقیم).

روش دوم را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. برای این کار شرط تعلق سه نقطه به یک خط راست را استنتاج می‌کنیم. برای تعلق نقاط A، B و C به یک خط مستقیم لازم و کافی است که به ازاء نقطه معین Q تساوی $\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB}$ برقرار باشد که در آن $p + q = 1$ است.

برهان ● اگر نقاط A، B و C به یک خط متعلق باشند آنگاه می‌توان $AC:CB = m:n$ را نوشت.
از رابطه $AC:CB = m:n$ نیز

$$\overrightarrow{QC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QB} \text{ ، } \overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB} \text{ ، } p + q = 1$$

را داریم. ملاحظات بالا کفایت و ضرورت شرط را ثابت می‌کند. بنابراین حل مسئله مطروحه به یافتن عبارتی تحویل می یابد که بردارهای $\overrightarrow{QP}$، $\overrightarrow{QE}$ و $\overrightarrow{QG}$ را بهم مربوط می‌سازد.
اگر نقطه Q بطور دلخواه اختیار شود آنگاه حل مسئله، خیلی پیچیده خواهد بود. بهتر این است که آن را منطبق بر نقطه C اختیار کنیم. در این حالت بردارهای $\overrightarrow{CP}$، $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ را می‌توان به آسانی برحسب $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ بیان کرد. درحقیقت با فرض $AP:PB = m:n \quad (1)$ آنگاه چنین خواهیم داشت:

$$AB_1:B_1C = m:(m + n + n) = m:(2n + m) \qquad (2)$$

(بدلیل اینکه نقطه M_2 میانگاه AC است)

$$BA_1:A_1C = n:(m + m + n) = n:(2m + n) \qquad (3)$$

و (بدلیل اینکه نقطه M_1 میانگاه BC است)

از ویژگی گرانیگاه G رابطه $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ استنتاج می‌شود. از روابط (2) و (3) می‌توان تساوی های $\overrightarrow{CA_1} = \frac{2n+m}{2(m+n)}\overrightarrow{CB_1}$ و $\overrightarrow{CB_1} = \frac{2m+n}{2(m+n)}\overrightarrow{CA_1}$ را نوشت. آنگاه با توجه به ویژگی نقطه E، میانگاه پاره‌خط A_1B_1، چنین می‌نویسیم:

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{CA_1}) = \frac{1}{4}\left(\frac{2n+m}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{n+2m}{m+n}\overrightarrow{CB}\right)$$

با توجه به قضیه تقسیم پاره‌خطی به نسبت معینی، $\overrightarrow{CP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{CB}$ را خواهیم داشت. برای ارتباط دادن بردارهای $\overrightarrow{CG}$، $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CP}$ بردار $\overrightarrow{CE}$ را تبدیل می‌کنیم:

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\left(\frac{m+2n}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{2m+n}{m+n}\overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{CB}\right) =$$
$$\frac{1}{4}(3\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CP}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CP}$$

یعنی: $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CP}$. و بدلیل $\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$ نقاط E، G و P به یک خط متعلق بوده و $EG:PE = 1:3$ خواهد بود. بدین ترتیب مسئله حل می‌گردد.

انواع مسائل مستوی مورد ملاحظه درفوق تمام انواع گوناگون مسائل مستوی را شامل نمی‌گردد. با این حال، این مسائل، گروه عمده‌ای از مسائل مستوی را که حائز اهمیت هستند، تشکیل می‌دهند.

۲ • مسائل متریک

در حل مسائل متریک از حاصلضرب درونی (اسکالر) بردارها استفاده می‌شود. بدون گروه‌بندی این مسائل چند مثال از آنها را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

مثال ۷ • نقطه P روی قاعده AB از مثلث متساوی الساقین ABC اختیار شده است. (a) ثابت کنید که: $PC^2 = AC^2 - AP\cdot BP$. (b) اگر نقطه P روی امتداد قاعده AB قرار گیرد فرمول فوق به چه شکل درمی‌آید؟ (شکل ۸۹).

حل • (a) تساوی مطروحه را به شکل برداری می‌نویسیم. با منظور کردن جهت های بردارهای $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{PB}$ به $\overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ وصول می‌یابیم. این تساوی را ثابت می‌کنیم. طرف راست این تساوی را بطریق زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+$$

$\overrightarrow{CP}^2 - \overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PC}) - (\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CP}^2 = \overrightarrow{AC}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PC}) - \overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) + \overrightarrow{CP}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CP}^2 = \overrightarrow{AP}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CP}^2.$

حال اگر $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AC}$ باشد آنگاه $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB'}$ بوده و $\triangle AB'B$ مثلث قائم الزاویه خواهد بود. بدین ترتیب $\overrightarrow{AP}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BB'} = 0$ را خواهیم داشت.

درنتیجه تساوی $\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CP}^2$ بدست می‌آید.

(b) اگر نقطه P به پاره‌خط AB متعلق باشد آنگاه در گذر از تساوی برداری به تساوی اسکالر چنین خواهیم داشت:

$\overrightarrow{PC}^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 = PC^2$ ، $\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = AC^2$

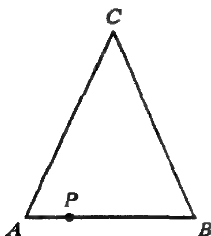
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}) = AP\cdot PB\cdot\cos 0° = AP\cdot PB$

یعنی: $PC^2 = AC^2 + AP\cdot PB$.

و اگر نقطه P به خط AB متعلق نباشد آنگاه بردارهای $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{PB}$ در جهات متقابل بوده و

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\cos 180° = -AP\cdot PB$

را خواهیم داشت. بدین ترتیب در این حالت تساوی مطروحه به شکل $PC^2 = AC^2 - AP\cdot PB$ در می‌آید.



شکل ۸۹

مثال ۸ ● مجموع مربعات میانه های مثلثی را پیدا کنید که طول اضلاع آن a، b و c است.

حل ● در مثلث ABC ، $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$، $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ و $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ را فرض می‌کنیم (شکل ۹۰).

آنگاه‌طبق تعریف مجموع بردارها، $\overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$، $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ و $\overrightarrow{CF} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}$ خواهد بود.

با استفاده از ویژگی مربع اسکالر چنین خواهیم داشت:

$\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{CF}^2 = \left(\mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}\right)^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}^2}{4} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \frac{\mathbf{b}^2}{4} + \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \frac{\mathbf{c}^2}{4} = \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

بدلیل $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ به $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = 0$ وصول می یابیم.

بدین ترتیب داریم: $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = 0$ ؛ یعنی:

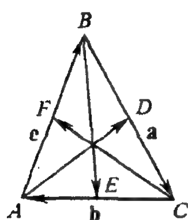
$a^2 + b^2 + c^2 = -2\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

از اینرو $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ استنتاج می‌شود. با جایگذاری مقدار حاصله برای عبارت $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ چنین نتیجه‌می‌شود:

$AD^2+BE^2+CF^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

بدلیل ویژگی مربع اسکالر:

$\overrightarrow{BE}^2=BE^2$ $\overrightarrow{AD}^2=AD^2$ و $\overrightarrow{CF}^2=CF^2$ را خواهیم داشت.



شکل ۹۰

مثال ۹ • ثابت کنید ارتفاعات هر مثلث دلخواهی متقارب هستند (در یک نقطه مشترکند).

حل • پاره‌خط های AP، BQ و CL ارتفاعات مثلث ABC و نقطه O را محل تلاقی ارتفاعات AP و BQ در نظر می‌گیریم (شکل ۹۱).

جهت اختصار، $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$، $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ را منظور می‌کنیم. طبق تعریف تفاضل بردارها $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$، $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}-\mathbf{c}$ است.

بدلیل $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OA}$ تساوی $\mathbf{a}(\mathbf{c}-\mathbf{b})=0$ یعنی:

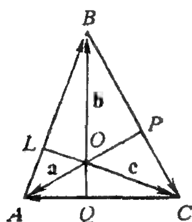
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \qquad (1)$$

را داریم. بطریق مشابه بدلیل $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{OB}$ تساوی $\mathbf{b}(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0$ را داریم که از آن نیز

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}. \qquad (2)$$

حاصل می‌شود. بنابر خاصیت انتقال‌پذیری از تساوی های (1) و (2) به $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ یا $\mathbf{c}(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$ وصول می‌یابیم. این تساوی به معنی $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OC}$ یا $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CO}$ است.

از آنجا که از یک نقطه فقط یک خط می‌توان بر خط راست دیگر عمود کرد از اینرو از $AB\perp CO$ و $AB\perp CL$ نتیجه می‌شود که CL بر امتداد CO منطبق بوده و بدین ترتیب سه ارتفاع مثلث در یک نقطه مشترک خواهند بود.



شکل ۹۱

۱ • جمع و تفریق بردارها. ضرب بردار در یک عدد

۳۹۸ • برای اینکه چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد لازم و کافی است که به ازاء هر نقطه‌ای مانند Q تساوی $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}$ برقرار شود. این نکته را ثابت کنید.

۳۹۹ • در چهارضلعی $ABCD$، نقاط M، N، P و Q بترتیب میانگاه اضلاع آن است. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ یک متوازی الاضلاع است.

۴۰۰ • روی ضلع AB از چهارضلعی $ABCD$ ، متوازی الاضلاع $ABCC'$ را رسم کرده و میانگاه ضلع $C'D$ را O می‌نامیم. اگر M و N بترتیب میانگاههای اضلاع AB و CD باشد آنگاه ثابت کنید که پاره‌خط AO موازی و مساوی پاره‌خط MN است.

۴۰۱ • در چهارضلعی $ABCD$ ، نقاط M و N بترتیب میانگاه اضلاع AD و BC است. ثابت کنید که: $2MN \leqslant AB + CD$

۴۰۲ • ثابت کنید خط واصل میانگاه های اقطار یک ذوزنقه با نصف تفاضل قاعده های آن برابر است.

۴۰۳ • اگر طول خط واصل میانگاه های دوضلع مقابل یک چهارضلعی محدب برابر نصف مجموع دو ضلع دیگر باشد آنگاه ثابت کنید این چهارضلعی یک ذوزنقه یا یک متوازی الاضلاع است.

۴۰۴ • نقاط M و N بترتیب میانگاههای اضلاع AB و CD از چهارضلعی $ABCD$ است. ثابت کنید که میانگاههای اقطار چهارضلعی $AMND$ و $BMNC$ رئوس یک متوازی الاضلاع است (یا روی یک خط مستقیم قرار دارد).

۴۰۵ • برای اینکه Q مرکز ثقل مثلث ABC باشد شرط لازم و کافی عبارت $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = 0$ است.

۴۰۶ • از نقطه M واقع در درون مثلث ABC بر اضلاع BC ، AC و AB عمودهایی رسم کنیم. روی این عمودها پاره‌خط های MA_1 ، MB_1 و MC_1 را مساوی اضلاع متناظر به این عمودها جدا می‌کنیم. ثابت کنید که نقطه M مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۴۰۷ • ثابت کنید در یک چهارضلعی دلخواه، پاره‌خط واصل میانگاه های اقطار از نقطه تلاقی خطوط واصل میانگاه های اضلاع مقابل عبور کرده و در این نقطه نصف می‌شود.

۴۰۸ • مثلث ABC و نقطه دلخواه Q مفروض است. ثابت کنید اگر متوازی الاضلاع های QBB_1C و QAA_1B_1 را رسم کنیم آنگاه قطر QA_1 از متوازی الاضلاع QAA_1B_1 از نقطه مرکز ثقل مثلث مفروض عبور کرده و $QA_1 = 3QO$ است.

۴۰۹ • ثابت کنید اگر خطی از رأس A مثلث ABC و میانگاه میانه BD عبور کند ضلع BC را به نسبت $1:2$ تقسیم می‌کند.

۴۱۰ • دو پاره‌خط مساوی AB و A_1B_1 مفروض اند. اندازه زاویه بین این پاره‌خط ها چقدر باشد تا فاصله میانگاه های AA_1 و BB_1 مساوی $\frac{1}{2}AB$ شود؟

۴۱۱ • از نقطه M واقع در درون یک متوازی الاضلاع خطوط مستقیمی را به موازات اضلاع آن رسم می‌کنیم. این خطوط اضلاع متوازی الاضلاع را در نقاط A ، C و B و D قطع می‌کنند. نقطه O مرکز متوازی الاضلاع مفروض است. ثابت کنید که نقطه تلاقی خطوط واصل میانگاه های اضلاع روبروی متوازی الاضلاع $ABCD$ میانگاه پاره‌خط OM است.

۴۱۲ • ثابت کنید خط واصل میانگاه های قاعده های یک ذوزنقه از نقطه تلاقی امتداد اضلاع جانبی

و نقطه تلاقی اقطار آن عبور می‌کند.

۴۱۳ ● ذوزنقه $ABCD$ مفروض است. خط موازی با قاعده‌های AB و CD اضلاع جانبی AD و BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. ثابت کنید اگر $CM \parallel AN$ باشد آنگاه $BM \parallel DN$ خواهد بود.

۴۱۴ ● در ذوزنقه $ABCD$ ، اضلاع AB و CD قاعده و نقاط M و N میانگاه‌های اضلاع جانبی AD و BC هستند. ثابت کنید خط مستقیم AN موازی خط CM نیست.

۴۱۵ ● در دایره‌ای به مرکز O دو وتر متعامد AB و CD در نقطه M همدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید میانگاه‌های اوتار AC و BD و نقطه M و نیز مرکز دایره رئوس یک متوازی الاضلاع هستند.

۴۱۶ ● در مثلث ABC میانهٔ CC_1 رسم شده است. ثابت کنید که: $CC_1 < \frac{1}{2}(CA + CB)$.

۴۱۷ ● مثلث ABC مفروض است. نقطه M محل تلاقی میانه‌های مثلث و نقطه O ، نقطه دلخواهی از صفحه مثلث است. ثابت کنید که: $OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$.

۴۱۸ ● دو متوازی الاضلاع $ABCD$ و $AB_1C_1D_1$ در رأس A مشترک هستند. ثابت کنید که:

$$CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$$

۴۱۹ ● دو متوازی الاضلاع $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ مفروض اند. ثابت کنید در حالت کلی میانگاه‌های پاره‌خط‌های AA_1 ، BB_1 ، CC_1 و DD_1 رئوس متوازی الاضلاع $A_0B_0C_0D_0$ هستند. دو متوازی الاضلاع را طوری رسم کنید که نقاط A_0 ، B_0 ، C_0 و D_0 به یک خط متعلق باشند.

۴۲۰ ● متوازی الاضلاع $ABCD$ مفروض است. نقاط P ، Q ، R و S اضلاع AB ، BC ، CD و DA را به نسبت‌های مساوی تقسیم می‌کنند. ثابت کنید چهارضلعی $PQRS$ یک متوازی الاضلاع است.

۴۲۱ ● دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ مفروض اند. اگر میانه‌های مثلث اول با اضلاع مثلث دوم موازی باشند آنگاه ثابت کنید که میانه‌های مثلث دوم نیز با اضلاع مثلث اول موازی هستند.

۴۲۲ ● چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. چهارضلعی دیگری را طوری رسم می‌کنیم که رئوس آن مرکز تلاقی میانه‌های مثلث‌های BCD ، CDA ، DAB و ABC باشند. ثابت کنید که خطوط واصل میانگاه‌های اضلاع روبروی دو چهارضلعی متقارب هستند.

۴۲۳ ● روی صفحه‌ای چهار خط مفروض هستند. بطوریکه سه تا از آنها در یک نقطه متقارب نبوده و در بین آنها نیز دو خط موازی یافت نمی‌شود. اگر یکی از این چهار خط با میانه مثلث تشکیل شده با سه خط دیگر موازی باشد آنگاه ثابت کنید که سه خط باقیمانده دارای ویژگی‌های مشابهی هستند.

۴۲۴ ● خطوط l ، m و n مرسوم از رئوس A ، B و C مثلث ABC در نقطه S متقاطع هستند. ثابت کنید خطوط مستقیم l_1 ، m_1 و n_1 که بترتیب از A_0 ، B_0 و C_0 میانگاه‌های اضلاع BC ، CA و AB عبور می‌کنند با خطوط l ، m و n موازی بوده و در یک نقطه متقارب هستند.

۴۲۵ ● مثلث ABC و نقطه M مفروض است. نقاط A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب میانگاه‌های اضلاع BC ، CA و AB هستند. از نقاط A ، B و C خطوط مستقیمی را به موازات MA_1 ، MB_1 و AC_1 رسم می‌کنیم. ثابت

کنید این خطوط متقارب هستند.

۴۲۶ • ثابت کنید اگر در چهارضلعی $ABCD$ ،MN خط واصل میانگاه های اضلاع BC و AD نصف مجموع دوضلع AB و CD باشد آنگاه چهارضلعی مز بور ذوزنقه یا متوازی الاضلاع خواهد بود.

۴۲۷ • در خارج مثلث ABC ، مثلث های ABC_1 ، BA_1C و CAB_1 رسم شده اند. ثابت کنید نقاط تقاطع میانه های مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ بر هم منطبق اند.

۴۲۸ • روی امتداد ارتفاعات AA_1، BB_1 از مثلث ABC در سوی رئوس A و B پاره‌خط های AA_2 و BB_2 را با شرایط $AA_2=BC$ و $BB_1=AC$ جدا می‌کنیم. ثابت کنید که: $CA_2 = CB_2$ و $CA_2 \perp CB_2$

۴۲۹ • در خارج مثلث ABC وروی اضلاع CA و CB مربعات CAA_1C_1 و $CBB_1C'_1$ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانه مثلث $CC_1C'_1$ مرسوم از رأس C بر ضلع AB عمود بوده و با نصف آن برابر است.

۴۳۰ • در خارج چهارضلعی $ABCD$ مربعات ABB_1A_1، $BCC_1B'_1$، CDD_1C' و $DAA'_1D'_1$ را با مراکز P ، Q ، R و S رسم می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط های PR و QS متعامد ومتساوی هستند.

۴۳۱ • چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. خطوط واصل میانگاههای اضلاع روبرو در نقطه M متقاطع هستند. خط شکسته $MAUV$ را با شرط $\overrightarrow{AU}=\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{MC}$ رسم می‌کنیم. ثابت کنید که نقطه M میانگاه پاره‌خط VD است. نسبت مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به مساحت چهارضلعی $MAUV$ پیدا کنید.

۴۳۲ • ثابت کنید که میانه های مثلث در نقطه تلاقی به نسبت $2:1$ تقسیم می‌شوند.

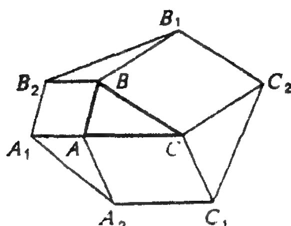
۴۳۳ • روی ضلع AD وقطر AC از متوازی الاضلاع $ABCD$ نقاط M و N را بترتیب با شرایط $AM=\frac{1}{5}AD$ و $AN=\frac{1}{6}AC$ اختیار می‌کنیم. ثابت کنید نقاط B ، N و M روی یک خط مستقیم قرار دارند. نقطه N پاره‌خط MB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

۴۳۴ • ثابت کنید در یک چهارضلعی دلخواه $ABCD$ ، پاره‌خط های واصل میانگاه های اضلاع روبرو (P ، K ، R و L میانگاههای اضلاع AB ، BC ، CD و AD هستند) وپاره‌خط واصل میانگاههای اقطار چهارضلعی (M میانگاه BD است) در یک نقطه متقارب بوده و در این نقطه نصف می‌شوند.

۴۳۵ • دو خط موازی l_1 و l_2 و دو جفت نقطه یعنی A_1، A_2 و B_1، B_2 مفروض اند. روی خطوط مفروض نقاط C_1 و C_2 را بترتیب طوری پیدا کنید که $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ و $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ باشد.

۴۳۶ • روی اضلاع مثلث ABC ، متوازی الاضلاع های ABB_2A_1، BCC_2B_1 و ACC_1A_2 را رسم می‌کنیم (شکل ۹۲).

آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که اضلاع آن مساوی پاره‌خط های B_1B_2 ، C_1C_2 و A_1A_2 باشد؟



شکل ۹۲

۲ • ضرب اسکالر (درونی) بردارها

۴۳۷ • دوضلع $AB = a$ و $CD = p$ و زاویه α بین این دوضلع از چهارضلعی $ABCD$ معلوم هستند. طول پاره‌خط واصل میانگاه دوضلع دیگر چهارضلعی را پیدا کنید.

۴۳۸ • در مثلث ABC با اضلاع $AB = 5$، $BC = 2$ و $AC = 4$ زاویه ABC را محاسبه کنید.

۴۳۹ • ثابت کنید که ارتفاعات یک مثلث منفرجة‌الزاویه متقاطع هستند.

۴۴۰ • ثابت کنید که در یک متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات اقطار آن با مجموع مربعات اضلاع متوازی‌الاضلاع مساوی است.

۴۴۱ • ثابت کنید اگر $ABCD$ یک مستطیل باشد آنگاه به ازاء هر نقطه M تساوی زیر برقرار است.

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

۴۴۲ • ثابت کنید که با توجه به حاده، قائمه یا منفرجه بودن زاویه C در مثلث ABC میانه CD نیز بترتیب بزرگتر، مساوی یا کوچکتر از $\frac{1}{2}AB$ خواهد بود.

۴۴۳ • ثابت کنید در مثلث ABC با مرکز ثقل M رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3\,(MA^2 + MB^2 + MC^2)$$

۴۴۴ • ثابت کنید اگر مرکز ثقل مثلث ABC بر نقطه تقارب ارتفاعات منطبق باشد آنگاه مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع خواهد بود.

۴۴۵ • هریک از میانه‌های مثلث را برحسب اضلاع آن بیان کنید.

۴۴۶ • در ذوزنقه‌ای با اقطار متعامد، قاعده بزرگتر برابر 4 و قاعده کوچکتر برابر 3 است. اگر یک ضلع جانبی آن با قاعده بزرگتر زاویه $60°$ تشکیل دهد طول آن را پیدا کنید.

۴۴۷ • مثلث ABC با شرایط $BC = 3$ ، $AC = 4$ و $\angle ABC = 120°$ مفروض است. نقطه M ضلع AB را از طرف رأس A به نسبت $1:3$ تقسیم کرده است. فاصله نقطه M را تا رأس C محاسبه کنید.

۴۴۸ • اگر ارتفاع CD از مثلث قائم‌الزاویه ABC از رأس قائمه مثلث رسم شود ثابت کنید که:

(a) $CD^2 = AD \cdot BD$; (b) $AC^2 = AB \cdot AD$; (c) $BC^2 = BA \cdot BD$

۴۴۹ • اقطار ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای متعامد هستند. ثابت کنید ارتفاع ذوزنقه بین قاعده‌های آن واسطه

هندسی است.

۴۵۰ • ثابت کنید در ذوزنقه $ABCD$ با قاعده‌های AB و CD تساوی‌های زیر برقرارند:

$$AC^2 + BD^2 > AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot DC$$

۴۵۱ • برای تعامد اقطار یک چهارضلعی لازم و کافی است که مجموع مربعات دوضلع روبروی آن برابر مجموع مربعات دوضلع دیگر باشد. این نکته را ثابت کنید.

۴۵۲ • ثابت کنید اگر دو میانهٔ مثلثی متعامد باشند آنگاه مجموع مربعات آنها با مربع میانه سوم برابر خواهد بود.

۴۵۳ • اگر در مثلث ABC میانه‌های AA_1 و BB_1 متعامد باشند رابطهٔ بین اضلاع آن را پیدا کنید.

۴۵۴ • اضلاع زاویه قائمه در یک مثلث قائم الزاویه برابر a و b است. نیمساز زاویه مرسوم از رأس قائمه را بیابید.

۴۵۵ • عمود DM را از D، میانگاه قاعده مثلث متساوی الساقین ABC برضلع BC رسم می‌کنیم. نقطه N میانگاه پاره‌خط MD است. ثابت کنید که پاره‌خط های AM و CN متعامد هستند.

۴۵۶ • از رأس قائمه C در مثلث قائم الزاویه ABC خطی را رسم می‌کنیم. از رئوس A و B مثلث عمودهای AA_1 و BB_1 را بر این خط عمود می‌کنیم. رأس C نسبت به نقطه M، میانگاه پاره‌خط A_1B_1 روی نقطه C_1 منعکس می‌شود. ثابت کنید که: $\angle AC_1B = \frac{\pi}{2}$

۴۵۷ • درطرفین ضلع AB از مثلث ABC دو مثلث متساوی الاضلاع ABC_1 و ABC_2 را رسم می‌کنیم. اگر خطوط CC_1 و CC_2 ($C \neq C_1$ و $C \neq C_2$) متعامد باشند رابطهٔ بین اضلاع مثلث مفروض را بیابید.

۳ • مسائل گوناگون

۴۵۸ • بر روی اضلاع یک متوازی الاضلاع و درخارج آن مربعاتی را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مراکز این مربعات رئوس یک مربع دیگر هستند.

۴۵۹ • روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC و درخارج آن مربعات $ABDE$ و $BCKF$ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط DF دوبرابر میانه BP از مثلث ABC بوده و بر آن عمود است.

۴۶۰ • روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC مثلث های متساوی الاضلاع ABC_1 و BCA_1 را در خارج آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط واصل میانگاه های AB و A_1B_1 با نصف طول پاره‌خط AC برابر بوده و با آن زاویه $60°$ می‌سازد.

۴۶۱ • روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC مثلث های متساوی الاضلاع ABC_1 و BCA_1 را در خارج آن رسم می‌کنیم. اگر M، N و P بترتیب میانگاه های اضلاع AC ، C_1B و BA_1 باشد آنگاه ثابت کنید که مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

۴۶۲ ● اقطار AC و BD از ذوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ ($AB \parallel CD$) در نقطه O با زاویه $60°$ همدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید میانگاه‌های پاره‌خط های OA، OD و BC رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع است.

۴۶۳ ● قطر AC از ذوزنقه $ABCD$ مثلث متساوی الاضلاع ACD را تشکیل می‌دهد. از نقطه E واقع بر قطر AC (یا روی امتداد آن) قاعده BC با زاویه $60°$ دیده می‌شود. ثابت کنید میانگاه‌های پاره‌خط های AE، BC و CD رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند.

۴۶۴ ● روی دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع که در یک رأس مشترک هستند دو مثلث متساوی الاضلاع (در داخل یا خارج متوازی الاضلاع) رسم می‌کنیم. آنگاه ثابت کنید مثلث حاصل از اتصال رأس متقابل به این رأس متوازی الاضلاع و رئوس آزاد مثلث های مرسوم تشکیل مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند.

۴۶۵ ● دو مثلث متساوی الاضلاع و هم جهت $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ مفروض اند. پاره خطهای A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 از طرف نقاط A_1، B_1 و C_1 بوسیله نقاط A، B و C به نسبت های مساوی تقسیم می‌شوند. ثابت کنید مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

۴۶۶ ● در ذوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ با زاویه حادۀ $45°$ قطر AC برابر ضلع CD است. ثابت کنید میانگاه قاعده کوچکتر، از رأس A و از میانگاه ضلع CD به یک فاصله است.

۴۶۷ ● روی پاره‌خط های AB و AC از یک خط مستقیم مثلث های متساوی الساقین وقائم الزاویه ABC_1 و ACB_1 ($\angle C_1 = \angle B_1 = 90°$) را در جهات متقابل رسم می‌کنیم. ثابت کنید که میانگاه پاره‌خط BC ونقاط B_1 و C_1 رئوس یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه هستند.

۴۶۸ ● در مثلث ABC ($\angle B = 45°$) ارتفاعات AA_1 و CC_1 در نقطه O متقاطع هستند. ثابت کنید میانگاه های پاره‌خط های BC، A_1C_1 و CD رئوس یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هستند.

۴۶۹ ● روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC و در خارج آن مثلث های متساوی الاضلاع ABC_1 و BCA_1 را بترتیب با مراکز O_1 و O_2 رسم می‌کنیم. ثابت کنید که پاره‌خط O_1O_2 دو برابر پاره‌خطی است که میانگاه های O_1C و C_1O_2 را بهم وصل کرده و با پاره خط مزبور زاویه $60°$ می‌سازد.

۴۷۰ ● روی اضلاع AB، BC و CD از مستطیل $ABCD$ و در خارج آن مثلث های متساوی الاضلاع ABO_1، BCO_2 و CDO_3 را رسم می‌کنیم. ثابت کنید فاصله های بین پاره‌خط های AB، O_1O_2 و BC، O_2O_3 برابر هستند.

۴۷۱ ● مربعات $ABMN$ و $CDKL$ روی اضلاع AB و CD از چهارضلعی محدب دلخواه $ABCD$ و در خارج آن رسم شده اند. ثابت کنید میانگاه های اقطار چهارضلعی های $ABCD$ و $MNKL$ رئوس یک مربع بوده و یا بر هم منطبق هستند.

۴۷۲ ● دو مربع هم جهت $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$ مفروض اند. پاره خط های A_1A_2، B_1B_2، D_1D_2 و C_1C_2

از طرف رئوس یکی از این مربعات بوسیله نقاط A_0، B_0، C_0 و D_0 به نسبت های مساوی تقسیم شده اند. ثابت کنید چهارضلعی $A_0B_0C_0D_0$ یک مربع است.

۴۷۳ • دو چند ضلعی منتظم و هم جهت $A_1A_2\ldots A_n$ و $B_1B_2\ldots B_n$ مفروض اند. پاره‌خط های A_1A_2، B_1B_2، ...، A_nB_n از طرف رئوس یکی از این چند ضلعی بترتیب با نقاط C_1، C_2، ...، C_n به نسبت های مساوی تقسیم شده اند. ثابت کنید چند ضلعی $C_1C_2\ldots C_n$ منتظم است.

۴۷۴ • روی اضلاع AB و BC از مثلث ABC مثلث های قائم الزاویه متساوی الساقین ABD و BCE ($\angle B = \angle C = 90°$) را در یک جهت رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانگاه های پاره‌خط های AB، BC و DE رئوس یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هستند.

۴۷۵ • در مربع $ABCD$، O مرکز مربع، M و N، میانگاه های خطوط BO و CD است. ثابت کنید مثلث AMN یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۴۷۶ • روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و درخارج آن مثلث های قائم الزاویه و متساوی الساقین ABM، BCN، CDP و DAQ ($\angle M = \angle N = \angle P = \angle Q = 90°$) را رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانگاه های پاره‌خط های MP و NQ و میانگاههای اقطار چهارضلعی رئوس یک مربع هستند.

۴۷۷ • در مثلث قائم الزاویه ABC، ارتفاع CD را از رأس قائمه مثلث رسم می‌کنیم. نقاط M و N اضلاع AC و CB را بترتیب با نسبتهای یکسانی تقسیم می‌کند (این نسبت ها از سوی نقاط A و C حساب می‌شوند). ثابت کنید مثلث DMN مشابه مثلث مفروض است.

۴۷۸ • روی قاعده و یکی از اضلاع جانبی مثلث متساوی الساقینی و درخارج آن دو مربع رسم می‌کنیم. ثابت کنید مراکز این مربعات و میانگاه ضلع جانبی دیگر مثلث رئوس یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۴۷۹ • در مستطیل $ABCD$، عمود BK را بر قطر AC رسم می‌کنیم. نقاط M و N پاره‌خط های AK و CD را نصف می‌کنند. ثابت کنید که $\angle BMN = 90°$ است.

۴۸۰ • مثلث ABC_1 را حول وتر AB از مثلث قائم الزاویه ABC متقارن این مثلث رسم می‌کنیم. اگر M میانگاه ارتفاع C_1D از مثلث ABC و N میانگاه ضلع BC باشد آنگاه ثابت کنید مثلث AMN مشابه مثلث ABC است.

۴۸۱ • متوازی الاضلاع $ABCD$ مفروض است. روی اضلاع AB و BC نقاط H و K را طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث های KAB و HCB متساوی الساقین باشند ($KA = AB$ و $HC = CB$). ثابت کنید مثلث KDH نیز متساوی الساقین است.

۴۸۲ • چهارضلعی $ABCD$ را حول نقطه O واقع بر صفحه آن به اندازه $90°$ چرخش می‌دهیم تا در وضعیت $A_1B_1C_1D_1$ قرار گیرد. ثابت کنید اگر P، Q، R و S میانگاههای پاره‌خط های A_1B، B_1C، C_1D و D_1A باشد آنگاه پاره‌خط های PR و QS متعامد و متساوی هستند.

۴۸۳ ● روی اضلاع یک چهارضلعی و درخارج آن مربعاتی را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مراکز این مربعات رئوس یک چهارضلعی با اقطار متساوی و متعامد هستند.

۴۸۴ ● در مثلث قائم الزاویه ABC ، از راس قائمه ارتفاع CD را رسم کرده و نقطه D_1 را متقارن نقطه D نسبت به ضلع AC مشخص می‌کنیم. ثابت کنید نقطه A و میانگاه های پاره‌خط های D_1C و CB رئوس یک مثلث مشابه با مثلث مفروض اند.

۴۸۵ ● در مثلث ABC ، نقطه D_1 را متقارن نقطه D از ضلع BC نسبت به وتر AB رسم می‌کنیم. نقطه E محل تلاقی پاره‌خط های DD_1 و AB_1، نقاط M و N بترتیب میانگاههای پاره‌خط های AD_1 و CE است. تساوی $\angle MNB=90°$ را ثابت کنید.

۴۸۶ ● در مثلث ABC ، ارتفاعات AA_1 و BB_1 را رسم می‌کنیم. همچنین نقطه AC را متقارن نقطه A_1 نسبت به خط AC مشخص می‌کنیم. نقاط M و N بترتیب میانگاههای پاره‌خط های B_1A_2 و AB هستند. ثابت کنید CMN یک مثلث قائم الزاویه است.

۴۸۷ ● به عنوان قطر روی ضلع AB از مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره خط های AC و BC را بترتیب در نقاط A_1 و B_1 قطع می‌کند. ثابت کنید میانگاههای وترهای AB_1 و BA_1 و پای ارتفاع مرسوم از رأس C در مثلث مفروض مثلثی بوجود می‌آورند که با مثلث اولیه مشابه است.

۴۸۸ ● عمودهای MA_1 و MB_1 از نقط دلخواه M واقع بر دایره محیطی مثلث ABC را بر اضلاع BC و AC از این مثلث وارد می‌کنیم. نقاط P و Q بترتیب میانگاههای پاره‌خط های AB و A_1B_1 هستند. ثابت کنید که: $\angle PQM = 90°$

۴۸۹ ● نیمساز AD مرسوم از رأس A مثلث ABC دایره محیطی مثلث را در نقطه A_1 قطع می‌کند. M و N بترتیب میانگاههای پاره‌خط های CD و A_1B هستند. ثابت کنید مثلث های ACA_1 و AMN متشابه هستند.

۴۹۰ ● وتر مشترک دو دایره متقاطع قطر یکی از آنها محسوب می‌شود. از یکی از دو انتهای این قطر مماس هایی را بر دو دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که انتهای دیگر قطر و میانگاه های قطعاتی از مماس ها که در داخل دایره ها قرار دارند، رئوس یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۴۹۱ ● ارتفاعات AD و BE را از مثلث ABC از طرف رئوس A و B امتداد می‌دهیم. روی این امتدادها پاره‌خط های AM و BN را با شرایط $AM= BC$ و $BN=AC$ جدا می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط های CM و CN متعامد و متساوی هستند.

۴۹۲ ● روی اضلاع AC و BC از مثلث ABC و در خارج آن مثلث های متساوی الاضلاع ACB_1 و BCA_1 را رسم می‌کنیم. نقطه M میانگاه ضلع AB و نقطه O مرکز مثلث ACB_1 است. زوایای مثلث MA_1O را پیدا کنید.

۴۹۳ ● روی اضلاع AC و BC از مثلث ABC و در خارج آن مربعات $ACDA_1$ و $BCEB_1$ را رسم

می‌کنیم. ثابت کنید نقطه تلاقی خطوط AB_1 و BA_1 روی ارتفاع مرسوم بر ضلع AB از مثلث مفروض قرار دارد.

۴۹۴ • سه مثلث متساوی الاضلاع A_1BC، A_2DE و A_3FQ با جهت های یکسان مفروض هستند. نقاط A_1، A_2 و A_3 رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هم جهت با این مثلث هاست. ثابت کنید میانگاه‌های پاره‌خط های CD ، EF و QB رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند.

۴۹۵ • متوازی الاضلاع $ABCD$ مفروض است. روی اضلاع CD و BC ودرخارج این متوازی الاضلاع مثلث های متشابه CDE و FBC را هم جهت رسم می‌کنیم. ثابت کنید مثلث FAE با این مثلث ها مشابه و هم جهت است.

۴۹۶ • روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC به عنوان قاعده، سه مثلث متساوی الساقین متشابه ABP ، ACQ و BCR را رسم می‌کنیم. دو دایره اول را در خارج مثلث و دایره سوم را در داخل آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی $APBQ$ متوازی الاضلاع است.

۴۹۷ • روی اضلاع AC و BC از مثلث ABC مستطیل های متشابه $ACMN$ و $BCPQ$ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطه تلاقی خطوط NB و QA روی ارتفاع مرسوم از رأس C مثلث یا بر امتداد آن واقع است.

۴۹۸ • از انتهای A وتر AB در دایره‌ای به مرکز O مماسی بر آن رسم می‌کنیم. عمود BM را از نقطه B بر این مماس وارد می‌آوریم. این عمود دایره را در نقطه C قطع می‌کند. ثابت کنید مرکز O و نقطه N که وتر AB را به نسبت $AN:NB = 1:2$ تقسیم می‌کند و نیز نقطه C' متقارن نقطه C نسبت به نقطه M، روی یک خط مستقیم قرار دارند.

۴۹۹ • دوضلع مقابل AB و CD از چهارضلعی $ABCD$ ازطرف نقاط A و C بترتیب با نقاط M و N به نسبت های مساوی تقسیم شده اند. ثابت کنید پاره‌خط MN، خط واصل میانگاه دوضلع را به همان نسبت تقسیم کرده وخود نیز بوسیله آن نصف می‌شود.

۵۰۰ • نقاط P، Q، R و S اضلاع چهارضلعی $ABCD$ را با شرایط $AP:PB = DQ:QC = m$ و $AR:RD = BS:SC = n$ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید که پاره‌خط های PQ و RS نیز همدیگر را با همان نسبت قطع می‌کنند.

۵۰۱ • متوازی الاضلاع $ADEF$ را در مثلث ABC طوری محاط کرده‌ایم که رئوس D ، E و F بترتیب روی اضلاع AB ، BC و AC قرار گرفته اند. از نقطه M میانگاه ضلع BC خط مستقیم AM را رسم می‌کنیم تا خط DE را در نقطه K قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی $CFDK$ یک متوازی الاضلاع است.

۵۰۲ • از دو رأس متقابل یک متوازی الاضلاع خطوط مستقیمی را عبور می‌دهیم. این خطوط اضلاع متوازی الاضلاع یا امتداد آنها را در چهار نقطه قطع می‌کنند. ثابت کنید این نقاط رئوس یک ذوزنقه یا

متوازی الاضلاع هستند.

۵۰۳ • نقطه M بر ضلع جانبی AB از ذوزنقه $ABCD$ را به رئوس C و D وصل می‌کنیم. از رئوس A و B خطوط مستقیم AN و BN را بترتیب موازی خطوط CM و DM رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطه N محل تلاقی این خطوط به ضلع CD تعلق دارد.

۵۰۴ • چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. خط راستی را از رأس A موازی ضلع BC رسم می‌کنیم و این خط قطر BD را در نقطه M قطع می‌کند. خط دیگری را نیز از رأس B به موازات ضلع AD رسم می‌کنیم و این خط نیز قطر AC را در نقطه N قطع می‌کند. ثابت کنید که: $MN \parallel CD$.

۵۰۵ • شش ضلعی «مرکز تقارن» دلخواهی مفروض است. روی اضلاع آن به عنوان قاعده، مثلث های متساوی الاضلاعی رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانگاه های پاره‌خط هایی که هردو رأس مجاور این مثلث ها را بهم وصل می‌کند. رئوس یک شش ضلعی منتظم است.

۵۰۶ • روی ضلع AC از مثلث ABC نقطه M را طوری اختیار می‌کنیم که $AM=\frac{1}{3}AC$ باشد. روی امتداد ضلع BC نقطه N را نیز طوری انتخاب می‌کنیم که $BN=CB$ باشد. نقطه تلاقی پاره‌خط های AB و MN آنها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۵۰۷ • سه پاره‌خط A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 مفروض اند. میانگاه های این خطوط را بترتیب با A_3، B_3 و C_3 و مرکز ثقل مثلث های $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ را بترتیب با M_1، M_2 و M_3 نشان می‌دهیم. ثابت کنید که M_3، میانگاه پاره‌خط M_1M_2 است (یا نقاط M_1، M_2 و M_3 بر هم منطبق اند).

۵۰۸ • روی میانه CM از مثلث ABC نقطه N مفروض است. از این نقطه خطوط AN و BN را رسم می‌کنیم تا اضلاع BC و AC را بترتیب در نقاط A_1 و B_1 قطع کنند. ثابت کنید پاره‌خط A_1B_1 بوسیله میانه CM نصف شده و موازی ضلع AB است.

۵۰۹ • روی ضلع AB از مثلث ABC نقطه P مفروض است. از این نقطه خطوطی را به موازات میانه های AM_1 و BM_2 رسم می‌کنیم تا اضلاع مثلث را در نقاط A_1 و B_1 قطع کنند. ثابت کنید میانگاه پاره‌خط A_1B_1، نقطه P_1 و نقطه Q محل تلاقی میانه های مثلث مفروض بر روی یک خط واقع است.

۵۱۰ • محل تلاقی میانه های مثلثی از مرکز محیطی آن برابر یک سوم شعاع این دایره است. ثابت کنید این مثلث، قائم الزاویه است.

۵۱۱ • روی دو خط پاره‌خط های AB و CD مفروض اند. پاره‌خط AB با نقاط M و M_1 به نسبت های $AM:AB=BM_1:AB=AC:BD$، $AC \neq BD$ و پاره‌خط CD با نقاط N و N_1 نیز به همان نسبت تقسیم شده اند. ثابت کنید پاره‌خط MM_1 بر پاره‌خط NN_1 عمود است.

۵۱۲ • ثابت کنید اگر اضلاع جانبی یک ذوزنقه بر هم عمود باشند آنگاه مجموع مربعات قاعده های آن با مجموع مربعات اقطار این ذوزنقه برابراست.

۵۱۳ • اگر در یک چهارضلعی مجموع مربعات اقطار آن با مجموع مربعات اضلاع آن برابر باشد آنگاه

چهارضلعی یک متوازی الاضلاع خواهد بود.

۵۱۴ ● دو مربع هم جهت $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ مفروض اند. رابطه $AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2$ را ثابت کنید.

۵۱۵ ● روی میانه CM_3 از مثلث ABC نقطه P مفروض است. خطوط AP و BP که از این نقطه عبور داده شده اند اضلاع CB و AC را بترتیب در A_1 و B_1 قطع می‌کنند. اگر $AA_1 = BB_1$ باشد آنگاه ثابت کنید مثلث مفروض، متساوی الساقین است.

۵۱۶ ● روی قاعده AB از مثلث متساوی الساقین ABC نقطه P مفروض است.
رابطه $PC^2 = AC^2 - AP\cdot BP$ را ثابت کنید. اگر P روی امتداد قاعده AB واقع باشد فرمول فوق به چه صورتی درمی‌آید؟

۵۱۷ ● عمودهای MX، MY و MZ را از نقطه M واقع در درون مثلث قائم الزاویه ABC (با زاویه قائمه C) بترتیب بر اضلاع BC، CA و AB وارد می‌کنیم. آنگاه رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$AY\cdot AC + BZ\cdot BA + CX\cdot CB = AB^2$$

۵۱۸ ● روی امتدادهای اضلاع AB، BC و CA از مثلث ABC نقاط M، N و P را بترتیب طوری اختیار می‌کنیم که $BM = AB$، $CN = BC$ و $AP = CA$ باشد. نسبت مجموع مربعات اضلاع مثلث PMN را بر مجموع اضلاع مثلث ABC بیابید.

۵۱۹ ● اضلاع جانبی BC و AD از ذوزنقه $ABCD$ را حول میانگاه های آنها در جهت مثبت به اندازه 90° دوران می‌دهیم تا در موقعیت B_1C_1 و A_1D_1 قرار گیرند. رابطهٔ $A_1B_1 = D_1C_1$ را ثابت کنید.

۵۲۰ ● روی اضلاع AB، CD و EF از شش ضلعی «مرکز تقارن» مثلث های متساوی الاضلاع هم جهت ABP، CDQ و EFR را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مثلث PRQ متساوی الاضلاع است.

۵۲۱ ● ضلع AC از مثلث ABC را حول رأس A به اندازهٔ $+90^\circ$ وضلع BC را حول رأس B به اندازهٔ -90° دوران می‌دهیم. ثابت کنید که موقعیت میانگاه پاره خط C_1C_2 مستقل از موقعیت رأس C است. نقاط C_1C_2 نقاط انتهایی پاره‌خط های دوران داده شده است.

۵۲۲ ● روی اضلاع یک چهارضلعی به عنوان قطر نیمدایره هایی رسم می‌کنیم. دوتا از این نیمدایره های متقابل در درون چهارضلعی و دو نیمدایره متقابل دیگر در بیرون آن قرار دارند. ثابت کنید میانگاههای کمانهای این نیمدایره ها رئوس یک متوازی الاضلاع هستند.

۵۲۳ ● یک مربع مفروض است. در داخل این مربع همهٔ مثلث های قائم الزاویه متساوی الساقینی را رسم می‌کنیم که یک رأس حادهٔ آنها بریکی از رئوس مربع ورأس قائمه آنها برروی اقطار مربع منطبق اند. مجموعهٔ رئوس سوم این مثلث ها را بیابید.

۵۲۴ ● روی اضلاع یک مثلث و درخارج آن مربعاتی را رسم می‌کنیم. ثابت کنید ارتفاعات مثلثی که رئوس آن مرکز تقارن این مربعات است از رئوس مثلث مفروض عبور می‌کنند.

۵۲۵ ● درمثلث ABC ارتفاع AA_1، BB_1 و CC_1 را رسم می‌کنیم نقاط A_0، B_0 و C_0 میانگاههای این

ارتفاعات است.

ثابت کنید مثلث های $A_0B_0C_1$ ، $B_0C_0A_1$ و $A_0C_0B_1$ متشابه هستند.

۵۲۶ ● خطوط موازی q_1 و q_2 و دو جفت نقطه یعنی A_1، A_2 و B_1، B_2 مفروض اند. روی خطوط مفروض نقاط C_1 و C_2 را طوری بیابید که $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ و $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ باشد.

۵۲۷ ● اضلاع BC و AD از چهارضلعی $ABCD$ بوسیله نقاط B_1، B_2 و A_1، A_2 به قسمت های مساوی تقسیم شده اند. آیا همیشه می‌توان خط مستقیمی را طوری رسم کرد که قطعه محصور از آن بوسیله اضلاع AB و CD بوسیله خطوط A_1B_1 و A_2B_2 به دو قسمت مساوی تقسیم شوند؟

۵۲۸ ● سه نقطه A_1، B_1 و C_1 مفروض اند. این نقاط را به عنوان نقاط تقسیم اضلاع مثلث ABC طوری اختیار می‌کنیم که آنها را به نسبت $2:1$ تقسیم کنند. مثلث ABC را رسم کنید.

۵۲۹ ● روی وتر مثلث قائم الزاویه ای یا در امتداد آن نقطه ای را طوری پیدا کنید که خط واصل تصاویر آن روی اضلاع زاویه قائمه بر وتر عمود باشد.

۵۳۰ ● پاره‌خط های OA ، OB و OC دوخط مستقیم a و b را در نقاط A ، B ، C و A_1، B_1 و C_1 طوری قطع می‌کنند که $AB:BC = n$ و $OA:AA_1 = m$ باشد. رابطه بین نسبت های $OB:OB_1 = x$ و $OC:OC_1 = y$ را پیدا کنید.

۵۳۱ ● اضلاع متقابل AB و DC ، AD و BC از چهارضلعی $ABCD$ درنقاط E و F همدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید پاره‌خط های حاصله از این طریق در تساوی $\frac{AE \cdot CE}{BE \cdot DE} = \frac{AF \cdot CF}{BF \cdot DF}$ صدق می‌کنند.

۵۳۲ ● پاره‌خط مارّ از مرکز ثقل مثلثی اضلاع آنها را به پاره‌خط های مساوی تقسیم می‌کند. رابطه بین نسبت قطعات حاصله بر روی یک ضلع و نسبت قطعات حاصل بر روی ضلع دیگر را بیابید.

۵۳۳ ● امتدادهای اضلاع متقابل یک چهارضلعی همدیگر را دوبدو در یک نقطه قطع می‌کنند. ثابت کنید میانگاه خط واصل این نقاط بر روی خطی قرار دارد که از میانگاههای اقطار چهارضلعی عبور می‌کند.

۵۳٤ ● روی صفحه ای یک دایره و یک نقطه مفروض اند. ثابت کنید مجموع توانهای چهارم فواصل این نقطه از رئوس دایره محاط در دایره مقداری ثابت است.

بخش ۷ ● مقادیر حداقل و حداکثر

مسائل مربوط به یافتن مقادیر حداقل و حداکثر را معمولاً می‌توان طبق طرح زیر با موفقیت حل کرد:

۱ ● کمیتی را که یافتن مقدار بهینه آن مطرح است (یعنی کمیتی که کوچکترین یا بزرگترین مقدار آن باید پیدا شود) مشخص کرده و آن را با حرف y (یا حروفات S، P، r، R و غیره براساس طرح مسئله) نشان می‌دهیم.

۲ ● یکی از کمیت های مجهول (یک ضلع، یک زاویه غیره) را متغیر مستقل در نظر گرفته و آن را با x

نشان می‌دهیم. کرانه های حقیقی تغییرات x (طبق شرایط مسئله) را تشکیل می‌دهیم.

۳ • طبق شرایط مشخص مسئله مقدار y را برحسب x و کمیت های مجهول بیان می‌کنیم. (این حالت، مرحلهٔ هندسی حل مسئله بشمار می‌رود).

٤ • بزرگترین یا کوچکترین مقدار تابع $y = f\ (x)$ (طبق مطلوبات مسئله) را که در مرحله قبل بدست آمده است در داخل **فاصله** ای از مقادیر تغییرات حقیقی x (که در بند 2 بدست آمده است) محاسبه می‌کنیم.

۵ • نتیجه بند ٤ را در مورد مسئله هندسی مفروض تفسیر می‌کنیم.

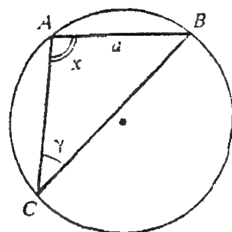
در طی سه مرحله اول مدل تحلیلی یا ریاضی مسئله تشکیل می‌شود. در اینجا حل موفقیت آمیز مسئله به انتخاب منطقی متغیر مستقل بستگی دارد. بیان تحلیلی y برحسب x با روش نسبتاً ساده حائز اهمیت است. در طی مرحله چهارم مدل ریاضی تشکیل شده بوسیله آنالیز ریاضی و گاهی نیز با روشهای مقدماتی بررسی می‌شود. طرح کلی حل مسئله یافتن بزرگترین یا کوچکترین مقدار تابع $y = f\ (x)$ را که در بازه X دیفرانسیل پذیر است، با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال بازگو می‌کنیم:

(1) $f'\ (x)$ را پیدا می‌کنیم.

(2) نقاط بحرانی و ایستا را در مورد تابع $f\ (x)$ بدست می‌آوریم. یعنی نقاطی را پیدا می‌کنیم که به ازاء آن $f'(x)=0$ بوده و یا $f'\ (x)$ موجود نیست.

(3) جدولی از مقادیر $y = f\ (x)$ تهیه می‌کنیم؛ این جدول بایستی مقادیری از تابع را شامل شود که به بند (2) مربوط شده و نیز نقاط انتهایی بازهٔ X را دربرگیرد. اگر بازهٔ X دارای نقطه انتهایی نباشد در آنصورت حدود تابع $f\ (x)$ به ازاء نقاط انتهایی بایستی در جدول آورده شود. خوانندگان بخاطر داشته باشند که در حل این مسائل حالاتی نیز پیش می‌آید که در آنها صرفاً از روش هندسی استفاده می‌شود (به مثال ۵ زیر مراجعه کنید)

مثال ۱ • روی دایره‌ای به شعاع R نقاط A و B مفروض اند. فاصله بین آنها برابر a است. غیر از این دو، نقطه دلخواه C نیز روی این دایره در نظر گرفته شده است. بزرگترین مقدار ممکنه برای عبارت $AC^2 + BC^2$ را بیابید (شکل ۹۳).



شکل ۹۳

حل ۱ • عبارت $AC^2 + BC^2$ کمیتی است که بایستی بهینه آن را بیابیم. تساوی $y = AC^2 + BC^2$ را در نظر می‌گیریم.

۲ • متغیر مستقلی را بصورت $x = \angle CAB$ اختیار می‌کنیم.

حدود حقیقی این متغیر عبارت از $0 < x < \pi - \gamma$ است که در آن $\gamma = \angle ACB$ می باشد(این زاویه

از انتخاب نقطه C مستقل است زیرا همیشه برابرنصف کمان AB کوچک است). بخاطر ماهیت مسئله بدیهی است که نقطه C بایستی روی کمان بزرگ AB انتخاب شود.

۳ • کمیت y یعنی $AC^2 + BC^2$ را برحسب x، a و R بیان می‌کنیم.

طبق قانون کسینوسها $BC = 2R \sin x$ و $AC = 2R \sin (\pi - x - \gamma) = 2R \sin (x + \gamma)$ است. بدلیل $AB = 2R \sin \gamma$ رابطه $a = 2R \sin \gamma$ را داریم که از آن نیز $\sin \gamma = \frac{a}{2R}$ استنتاج می‌شود. درنتیجه رابطهٔ زیر حاصل می‌شود که در آن $\sin \gamma = \frac{a}{2R}$ است:

$$y = AC^2 + BC^2 = (2R \sin x)^2 + (2R \sin (x + \gamma))^2 = 4R^2 (\sin^2 x + \sin^2 (x + \gamma)$$

(مدل ریاضی مسئله تشکیل شده است).

٤ • تابع $y = 4R^2 (\sin^2 x + \sin^2 (x + \gamma))$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. بایستی بزرگترین مقدار آن را در بازهٔ (0 و $\pi - \gamma$) بیابیم. درعبارت تابع تبدیلاتی را انجام می‌دهیم. چنین داریم:

$$y = 4R^2 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos (2x + 2\gamma)}{2}\right) = 2R^2 [2 - (\cos 2x + \cos (2x + 2\gamma))] = 4R^2 (1 - \cos (2x + \gamma) \cos \gamma).$$

بزرگترین مقدار عبارت حاصله را می‌توان بدون استفاده از مشتق بدست آورد. بدیهی است که تابع بزرگترین مقدار را وقتی اختیار می‌کند که $\cos (2x + \gamma)$ کوچکترین مقدار خود را اختیار کند. یعنی وقتی که $\cos (2x + \gamma) = -1$ باشد. این تساوی به ازاء $2x + \gamma = \pi$ یعنی به ازاء $x = \frac{\pi - \gamma}{2}$ حادث می‌شود. توجه دارید که نقطه $\frac{\pi - \gamma}{2}$ به بازهٔ (0 و $\pi - \gamma$) تعلق دارد. خال بزرگترین مقدار ممکنه برای تابع y را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 4R^2 (1 - (-1) \cos \gamma) = 4R^2 (1 + \cos \gamma) = 4R^2 (1 + \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}) = 4R^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}\right) = 2R (2R + \sqrt{4R^2 - a^2})$$

(دراینجا آخرین مرحله مسئله درچهارچوب تشکیل مدل ریاضی انجام گرفته است).

۵ • با مراجعه به اصل مسئله نتیجه زیر را بیان می‌کنیم:

بزرگترین مقدار ممکنه برای عبارت $AC^2 + BC^2$ با $2R(2R + \sqrt{4R^2 - a^2})$ برابر است؛ این مقدار وقتی حاصل می‌شود که $\angle CAB = \frac{\pi - \gamma}{2}$ یعنی مثلث ABC متساوی الساقین باشد($AC = CB$).

مثال ۲ • از نقطه ثابت M، دردرون یک زاویه خط مستقیمی را طوری رسم کنید که مثلث حاصله دارای کوچکترین مساحت ممکنه باشد (شکل ۹٤).

حل • ۱ • کمیت مورد بهینه عبارت از S، مساحت مثلث AOB است.

۲ • خطوطی بصورت $DM \| OB$ و $MK \| OA$ را رسم می‌کنیم. اگر $KB = x$ منظور شود کرانه های حقیقی x عبارت از $0 < x < +\infty$ خواهد بود.

۳ ● چون M نقطه ثابتی است پاره‌خط های DM و KM نیز ثابت بوده و $DM=a$ ، $KM=b$ را منظور می‌کنیم. مقدار S را برحسب x ، a و b بیان می‌کنیم.

مثلث های MKB و AOB را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. آنها متشابه بوده و از اینرو $\frac{MK}{AO}=\frac{KB}{OB}$ یعنی $\frac{b}{AO}=\frac{x}{a+x}$ را داریم. از اینرو $AO=\frac{b(a+x)}{x}$ بدست می‌آید.

باز هم $S=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\alpha$ را داریم که در آن $\alpha=\angle AOB$ است. بنابراین

$$S=\frac{1}{2}\frac{b(a+x)}{x}(a+x)\sin\alpha=\frac{b\sin\alpha}{2}\cdot\frac{(a+x)^2}{x}$$

(مدل ریاضی مسئله) بدست می‌آید.

۴ ● تابع $S=k\frac{(a+x)^2}{x}$ ، $0<x<+\infty$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که در آن $k=\frac{b\sin\alpha}{2}$ است. کوچکترین مقدار آن را بدست می‌آوریم.

$$(1)\quad S'=k\frac{2(a+x)x-(a+x)^2}{x^2}=k\frac{(a+x)(x-a)}{x^2}$$

(2) مشتق تابع در نقطه $x=0$ وجود ندارد و در نقاط $x=-a$ و $x=a$ صفر می‌شود. از بین این سه نقطه فقط نقطه $x=a$ به بازهٔ (0 و $+\infty$) تعلق دارد.

(3) حدود یک طرفه تابع را در نقاط انتهایی بازه بدست می‌آوریم:

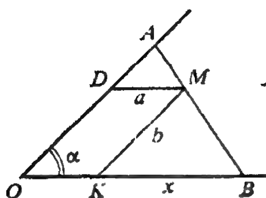
$$\lim_{x\to+0}\frac{k(a+x)^2}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k(a+x)^2}{x}=+\infty$$

جدول مقادیر تابع به شرح زیر خواهد بود.

x	0	$+\infty$	a
y	$+\infty$	$+\infty$	$4ka$

بنابراین کوچکترین مقدار تابع در نقطه $x=a$ حاصل می‌شود.

۵ ● به اصل مسئله هندسی برمی‌گردیم. اگر $x=KB=a$ باشد آنگاه بدلیل $OK=a$ و میانخط بودن MK در مثلث AOB ، نقطه M میانگاه AB خواهد بود. بدین ترتیب برای تشکیل مثلثی با حداقل مساحت ممکنه خط مستقیم را بایستی طوری از نقطه M عبور دهیم که قطعه محصور از این خط در داخل زاویه با نقطه M نصف شود.



شکل ۹۴

مثال ۳ ● روی اضلاع مساوی AB و BC از مثلث متساوی الساقین ABC نقاط D و E را با شرط

$AC \parallel DE$ اختیار می‌کنیم. روی خط DE مربعی را طوری رسم می‌کنیم که مربع و نقطه B در دو طرف خط DE قرار بگیرند. اگر $AC=b$ و ارتفاع BH از مثلث ABC برابر h باشد بزرگترین مقدار ممکنه برای مساحت سطح اشتراک مثلث و مربع را بیابید.

حل ۱● کمیت مورد بهینه عبارت از مساحت سطح اشتراک مثلث و مربع است که با S نشان می‌دهیم.

۲● ضلع مربع را با x یعنی $DE=x$ نشان می‌دهیم و کرانه های حقیقی x را پیدا می‌کنیم. بدیهی است که از میان همهٔ مربعاتی که کاملاً در داخل مثلث قرار دارند مربعی بیشترین مساحت را داراست که در داخل مثلث محاط شده است. یعنی مربعی که همهٔ رئوس آن روی اضلاع مثلث قرار دارند (شکل ۹۵). اگر مقدار x از طول ضلع مربع محاطی بیشتر باشد آنگاه مربع و مثلث به شکل ۹۶ درمی‌آیند. در این حالت سطح مشترک مثلث، مربع با مستطیل محاطی $DEPT$ نشان داده می‌شود. از اینرو x از طول ضلع مربع محاطی تا ضلع AC تغییر می‌کند. ضلع مربع محاطی را پیدا می‌کنیم. از تشابه مثلث های BDE و ABC (به شکل ۹۵ مراجعه کنید) درمی‌یابیم که:

$$\frac{x}{b}=\frac{h-x}{h} \quad x=\frac{bh}{b+h}$$

بنابراین $\frac{bh}{b+h}\leqslant x<b$ حاصل می‌شود.

۳● مساحت S مربوط به مستطیل محاطی $DEPT$ را برحسب a، x و h بیان می‌کنیم. از تشابه مثلث های ADT و ABH به $\frac{DT}{BH}=\frac{AT}{AH}$ یعنی $\frac{DT}{h}=\frac{\frac{b}{2}-\frac{x}{2}}{\frac{b}{2}}$ وصول می‌یابیم که از آن نیز $DT=\frac{h(b-x)}{b}$ و درنتیجه $S=\frac{hx(b-x)}{b}$ بدست می‌آید.

٤● تابع $S=\frac{h}{b}(bx-x^2)$ را در بازهٔ نیم باز $\left(b,\frac{bh}{b+h}\right]$ مورد ملاحظه قرار داده و بزرگترین مقدار آن را بدست می‌آوریم:

$$(1)\ \ S'=\frac{h}{b}(b-2x) \qquad\qquad (2)\ \ S'=0 \ ؛\ x=\frac{b}{2}\ \text{به ازاء}$$

حال تعلق نقطه $\frac{b}{2}$ را به بازهٔ نیم باز $\left(b\ ,\ \frac{bh}{b+h}\right]$ یعنی برقراری نامساوی $\frac{b}{2}<\frac{bh}{b+h}$ را بررسی می‌کنیم. این رابطه باشرط $2h<b+h$ یعنی با شرط $h<b$ متقاعد می‌شود. اگر $b\leqslant h$ باشد آنگاه در درون بازهٔ نیم باز $\left(b\ ,\ \frac{bh}{b+h}\right]$ نقطه ایستا وجود نخواهد داشت.

(3) از بین مقادیر تابع، جدولی را برای یافتن بزرگترین مقدار آن تهیه می‌کنیم. قبل از همه توجه داریم که: $\lim\limits_{x\to b-0} S(x)=\lim\limits_{x\to b-0}\frac{h}{b}(bx-x^2)=0$. همچنین از آنجا که $\frac{bh}{b+h}$ یک ضلع مربع محاطی است، $S\left(\frac{bh}{b+h}\right)=\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$ را داریم.

سرانجام چنین حاصل می‌شود: $S\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{h}{b}\left(b\cdot\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)=\frac{hb}{4}$.
اگر $h<b$ باشد آنگاه جدول مورد نظر دارای شکل زیر خواهد بود:

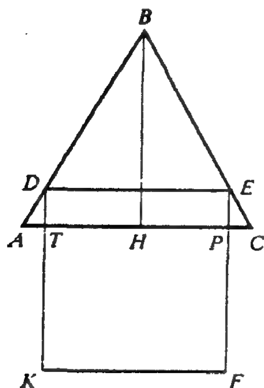
x	$\frac{bh}{b+h}$	$\frac{b}{2}$	b
S	$\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$	$\frac{bh}{4}$	0

حال $\frac{bh}{4}>\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$ را ثابت می‌کنیم. این رابطه را به نامساوی $(b+h)^2>4bh$ یعنی $(b-h)^2>0$ تحویل می‌دهیم که یک نامساوی بدیهی است. بدین ترتیب اگر $h<b$ باشد آنگاه بزرگترین مقدار تابع S عبارت از $\frac{bh}{4}$ بوده و در نقطه $x=\frac{b}{2}$ به این مقدار می رسد. اگر $h\geqslant b$ باشد آنگاه جدول مورد نظر دارای شکل زیر خواهد بود:

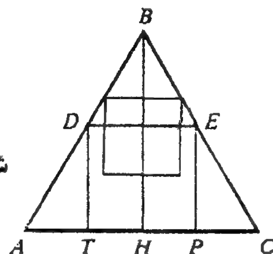
x	$\frac{bh}{b+h}$	b
S	$\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$	0

در این حالت بزرگترین مقدار تابع S برابر $\left(\frac{bh}{b+h}\right)^2$ بوده و در نقطه $x=\frac{bh}{b+h}$ به این مقدار می‌رسد.

۵ ● با مراجعه به اصل مسئله به نتیجه گیری زیر وصول می یابیم. اگر ارتفاع مثلث از قاعده آن کوتاهتر باشد آنگاه سطح مشترک مثلث و مربع رسم شده بر روی میانخط مثلث بزرگترین سطح را خواهد داشت. و اگر ارتفاع مثلث از قاعده کوتاهتر باشد آنگاه مساحت مربع محاط در مثلث بزرگترین مقدار را خواهد داشت.



شکل ۹۶



شکل ۹۵

مثال ٤ ● در یک دایره‌ای به شعاع R همهٔ ذوزنقه های محاطی مورد نظر هستند. طول ضلع جانبی

ذوزنقه ای را پیدا کنید که دارای بیشترین مساحت باشد، با این شرط که طول یکی از قاعده های آن برابر $R\sqrt{3}$ باشد.

حل ۱ ● کمیت مورد بهینه را که مساحت ذوزنقه است با S نشان می‌دهیم.

۲ ● زاویه مجاور به قاعده معلوم را با x نشان می‌دهیم. حداقل مقدار ممکنه برای این زاویه عبارت از $60°$ بوده و در اینصورت ذوزنقه به یک مثلث منتظم محاطی تبدیل می‌شود که طول ضلع آن برابر $R\sqrt{3}$ خواهد بود (شکل ۹۷). از طرف دیگر چون کمان مقابل به زاویه مجاور به قاعده ذوزنقه از $240°$ کمتر است (شکل ۹۸) از اینرو x نیز بایستی کمتر از $120°$ باشد. بدین ترتیب کرانه های حقیقی متغیر مستقل کمکی عبارت از $60° \leqslant x < 120°$ خواهد بود.

۳ ● مساحت S ذوزنقه $ABCD$ را برحسب x و R بیان می‌کنیم. چنین داریم:

$$AD = R\sqrt{3} \text{ ، } BD = 2R\sin x \text{ ، } \angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD = 60° \quad \angle BDA = 120° - x$$

$$BH = BD\ \sin(120° - x) = 2R\sin x \times \sin(120° - x)$$

BH نیز ارتفاع ذوزنقه است. چنین حاصل می‌شود:

$$HD = \frac{AD + BC}{2} = BD\cos(120° - x) = 2R\sin x\cos(120° - x)$$

$$S = HD \cdot BH = 2R\sin x\cos(120° - x) \cdot 2R\sin x\sin(120° - x) = 2R^2\sin^2 x\sin(240° - 2x)$$

۴ ● بزرگترین مقدار تابع $S = 2R^2\sin^2 x \times \sin(240° - 2x)$ را در بازهٔ نیم باز $[60°, 120°)$ بدست می‌آوریم.

(1) $$S' = 2R^2(2\sin x\cos x\sin(240° - 2x) - 2\sin^2 x \times \cos(240° - 2x)) = 4R^2\sin x(\sin(240° - 2x)\cos x - \sin x \times \cos(240° - 2x)) = 4R^2\sin x\sin(240° - 2x - x) = 4R^2\sin x \times \sin(240° - 3x).$$

(2) در بازهٔ نیم باز $[60°, 120°)$ مقدار S' فقط در نقطه $x = 80°$ صفر می‌شود.

(3)

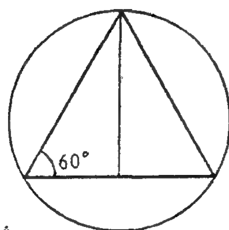
x	$60°$	$80°$	$120°$
S	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$2R^2\sin^3 80°$	0

در این جدول $S(120°)$ به عنوان $\lim_{x \to 120°} S$ مفهوم می‌شود.

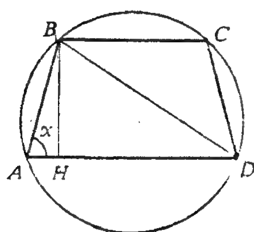
مقادیر $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ و $2R^2\sin^3 80^\circ$ را مقایسه می‌کنیم. با فرض $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4} > 2R^2\sin^3 80^\circ$ به $\frac{3\sqrt{3}}{8} > \sin^3 80^\circ$ وصول می‌یابیم که از آن نیز $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 > \sin^3 80^\circ$ یعنی $\frac{\sqrt{3}}{2} > \sin 80^\circ$ یا $\sin 60^\circ > \sin 80^\circ$ استنتاج می‌شود. نامساوی اخیر و درنتیجه فرض ما درست می‌باشد. از اینرو تابع S در $x = 80^\circ$ به بزرگترین مقدار خود می‌رسد.

۵ ● بدین ترتیب ذوزنقه ای دارای بیشترین مساحت می‌شود که زاویه مجاور به قاعدهٔ آن 80° باشد. پیدا کردن ضلع جانبی چنین ذوزنقه ای مطلوب شده است.

از مثلث ABD (شکل ۹۸) به $AB = 2R\sin(120^\circ - x)$ می‌رسیم. به ازاء $x = 80^\circ$ تساوی $AB = 2R\sin 40^\circ$ حاصل می‌شود.



شکل ۹۷



شکل ۹۸

مثال ۵ ● ثابت کنید که دربین همهٔ مثلث ها که قاعده وزاویه مقابل به قاعده در آنها یکسان است مثلثی دارای بلندترین نیمساز زاویه مقابل به قاعده است که متساوی الساقین باشد.

حل ● روش اول.

1 ● طول نیمساز BD را باید بهینه کنیم (شکل ۹۹).

2 ● طبق فرض AC و $\angle ABC$ مقادیر ثابتی هستند. تساوی های $AC = b$ و $\angle ABC = \beta$ را در نظر می‌گیریم و متغیر مستقل $\angle ADB = x$ را معرفی می‌کنیم. کرانه های حقیقی متغیر x را بدست می‌آوریم. از یک طرف، زاویه x برای مثلث BDC زاویه خارجی بوده و از هریک از زوایای داخلی مثلث BDA که غیرمجاور به این زاویه هستند بزرگتر است. یعنی $x > \frac{\beta}{2}$ است. ازطرف دیگر از مثلث ABD به $x < \pi - \frac{\beta}{2}$ و درنتیجه به $\frac{\beta}{2} < x < \pi - \frac{\beta}{2}$ وصول می‌یابیم.

3 ● BD را برحسب x، b و β بیان می‌کنیم.

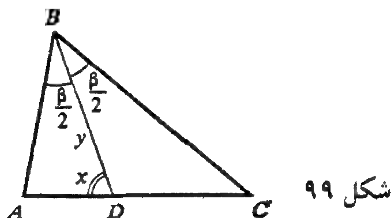
توجه داریم که $\angle BAD = \pi - x - \frac{\beta}{2}$ و $\angle BCD = x - \frac{\beta}{2}$ است.

طبق قانون سینوسها از مثلث ABC به $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ یعنی $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\left(x - \frac{\beta}{2}\right)}$ می‌رسیم

که از آن نیز $AB = \frac{b\sin\left(x - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta}$ بدست می‌آید. بطریق مشابه طبق قانون سینوسها از مثلث ABD

نیز $\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin D}$ یعنی $\frac{y}{\sin\left(\pi-x-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{AB}{\sin x}$ حاصل می‌شود که از آن نیز تساوی زیر استنتاج می‌شود:

$$y=\frac{AB\sin\left(x+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin x}=\frac{b\sin\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin x\sin\beta}=\frac{b}{2\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta-\cos 2x}{\sin x}.$$



شکل ۹۹

٤ • بزرگترین مقدار تابع $y=\frac{b}{2\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta-\cos 2x}{\sin x}$ را در بازهٔ $\left(\frac{\beta}{2}\ ,\ \pi-\frac{\beta}{2}\right)$ بدست می‌آوریم.

(1)

$$y'=\frac{b}{2\sin\beta}\cdot\frac{2\sin 2x\sin x-\cos x(\cos\beta-\cos 2x)}{\sin^2 x}=\frac{b}{2\sin\beta}\times$$
$$\frac{(\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x)+\sin 2x\sin x-\cos\beta\cos x}{\sin^2 x}=\frac{b}{2\sin\beta}\times$$
$$\frac{\cos x+2\sin^2 x\cos x-\cos\beta\cos x}{\sin^2 x}=\frac{b}{2\sin\beta}\cdot\frac{\cos x(1-\cos\beta+2\sin^2 x)}{\sin^2 x}=$$
$$\frac{b\cos x\left(\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2 x\right)}{\sin\beta\sin^2 x}.$$

(2) اگر $\cos x=0$ باشد یعنی به ازاء $x=\frac{\pi}{2}$ (معادله $\cos x=0$ در بازهٔ باز $\left(\frac{\beta}{2},\pi-\frac{\beta}{2}\right)$ جواب دیگری ندارد)، $y'=0$ است؛ اگر $\sin x=0$ باشد y' موجود نخواهد بود و در بازهٔ باز $\left(\frac{\beta}{2}\ ,\ \pi-\frac{\beta}{2}\right)$ این معادله فاقد جواب است.

(3) جهت تهیه جدولی برای یافتن بزرگترین مقدار ابتدا همهٔ حدود یکطرفه تابع تحت بررسی را به ازاء $x\to\frac{\beta}{2}+0$ و $x\to\pi-\frac{\beta}{2}-0$ پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\beta}{2}+0}\frac{b(\cos\beta-\cos 2x)}{2\sin\beta\sin x}=\frac{b(\cos\beta-\cos\beta)}{2\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}}=0,$$
$$\lim_{x\to\pi-\frac{\beta}{2}-0}\frac{b(\cos\beta-\cos 2x)}{2\sin\beta\sin x}=\frac{b(\cos\beta-\cos(2\pi-\beta))}{2\sin\beta\sin\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)}=0.$$

حال بدیهی بنظر می‌رسد که بزرگترین مقدار تابع $y(x)$ به ازاء $x=\frac{\pi}{2}$ حاصل می‌شود. این مقدار برابر

عبارت زیر است:

$$\frac{b}{2\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta+1}{1}=\frac{b\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}}{4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{b}{2}\cot\frac{\beta}{2}.$$

۵ ● اگر $x=\frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه $\angle ADB = 90°$ خواهد بود. این امر بدین معنی است که در مثلث ABC نیمساز BD ارتفاع آن نیز بوده و از اینرو مثلث ABC متساوی الساقین است. بدین ترتیب از بین همهٔ مثلث هایی با زاویه مقابل به قاعده و قاعده یکسان مثلثی دارای بزرگترین نیمساز زاویه مقابل به قاعده است که متساوی الساقین باشد.

روش دوم ● در اینجا روش هندسی برای حل مسئله ارائه می‌دهیم که بطور چشمگیری از راه قبلی خلاصه‌تر و ظریف‌تر است.

بر مثلث ABC با نیمساز زاویه BD دایره‌ای را محیط می‌کنیم (شکل ۱۰۰). رئوس همهٔ مثلث های باقیمانده با قاعده وزاویه مقابل به قاعده یکسان روی کمان ABC قرار دارد. مثلث متساوی الساقین AB_1C را اختیار کرده و نیمساز B_1D_1 را رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که $BD < B_1D$ است. نیمسازهای BD و B_1D_1 را امتداد می‌دهیم تا دایره را قطع کند. هردوی آنها دایره را در یک نقطه مانند M قطع می‌کنند که میانگاه کمان AC است. بدلیل اینکه B_1M قطر دایره است، $BM < B_1M$ را داریم. از مثلث DD_1M نتیجه می‌شود که $DM > D_1M$ است. از این نامساوی‌ها $DM < B_1M - D_1M$ و در نتیجه $BM - BD < B_1D_1$ استنتاج می‌شود.

شکل ۱۰۰

مسائل

۵۳۵ ● ثابت کنید که در مثلث قائم الزاویه $\frac{r}{R} \leqslant \sqrt{2}-1$ است. در این رابطه r شعاع دایره محاطی و R شعاع دایره محیطی مثلث است.

۵۳۶ ● ثابت کنید در یک مثلث متساوی الساقین نسبت شعاعهای دایره های محاطی و محیطی از $\frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کند.

۵۳۷ ● ثابت کنید در بین مثلث هایی که در آنها زاویه های مقابل به قاعده ها مساوی بوده و مجموع

اضلاع جانبی آنها مقدار ثابتی است، مثلثی دارای کوتاهترین قاعده است که متساوی الساقین باشد.

۵۳۸ • ثابت کنید در بین مثلث هایی که در آنها قاعده ها و زاویه های مقابل به قاعده ها مساوی هستند مثلثی دارای (a) بیشترین مساحت، (b) بیشترین محیط، است که متساوی الساقین باشد.

۵۳۹ • ثابت کنید در بین مثلث های متساوی الساقین محاط در یک دایره مثلثی دارای (a) بیشترین مساحت، (b) بیشترین محیط است که متساوی الاضلاع باشد.

۵۴۰ • نقطه A واقع بین دو خط موازی l_1 و l_2 بترتیب به فاصله های a و b از آنها قرار دارد. این نقطه رأس مثلث قائم الزاویه ABC است. نقطه B روی خط مستقیم l_1 ونقطه C روی خط مستقیم l_2 قرار دارد. ثابت کنید از بین همهٔ چنین مثلث هایی مثلثی با اضلاع زاویه قائمه با طول های $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{2}$ کمترین مساحت را دارد.

۵۴۱ • مستطیلی را درداخل مثلثی محاط کرده ایم. ثابت کنید مساحت مستطیل از نصف مساحت مثلث بیشتر نیست.

۵۴۲ • در داخل مثلث معینی متوازی الاضلاع هایی را طوری محاط کرده ایم که با مثلث در یک زاویه مشترک هستند. ثابت کنید متوازی الاضلاعی دارای بیشترین مساحت است که رأس آن ضلع مقابل به زاویه مشترک را در مثلث نصف کند.

۵۴۳ • مساحت مثلث ABC برابر S بوده و $\angle B=\beta$ است. حداقل مقدار کمیت های زیر را بیابید: (a) مجموع اضلاع AB و BC ؛ (b) ضلع AC ؛ (c) محیط مثلث.

۵۴۴ • از بین همهٔ مثلث های متساوی الساقین که در آنها طول میانه های وارد بر ضلع جانبی مقدار یکسان است مثلثی را بیابید که دارای بیشترین مساحت باشد. اندازهٔ زاویه مقابل به قاعده چنین مثلثی چقدر خواهد بود؟

۵۴۵ • در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اضلاع AB و AC را از رئوس B و C آنقدر امتداد می‌دهیم تا به این اضلاع به طول های AD و AE با شرط $BD+CE=AC$ تبدیل شوند. AD و AE را طوری پیدا کنید که پاره‌خط DE کوتاهترین طول را داشته باشد.

۵۴۶ • روی ضلع AC از مثلث ABC نقطه دلخواهی را اختیار کرده و از آن عمودهایی را بر اضلاع AB و BC رسم می‌کنیم. اگر $AB > BC$ باشد مقادیر مینیمم و ماگزیمم حاصلجمع طول این عمودها را بیابید.

۵۴۷ • در یک مثلث قائم الزاویه مستطیلی را محاط کنید که یک رأس آن با رأس قائمه مثلث مشترک بوده و قطر آن حداقل باشد.

۵۴۸ • مجسمه ای به طول 4 m روی ستونی به ارتفاع 5.6 m قرار گرفته است. یک ناظر در چه فاصله ای از ستون باید قرار گیرد تا مجسمه را با بزرگترین زاویه ممکن رؤیت کند؛ با این فرض که فاصله سطح زمین از سطح چشم ناظر معادل 1.6 m باشد؟

۵۴۹ • طول اضلاع جانبی و طول یکی از قاعده های ذوزنقه ای برابر $15\ \text{cm}$ است. برای به حداکثر رسیدن مساحت این ذوزنقه قاعده دیگر آن چقدر باید باشد؟

۵۵۰ • ذوزنقه قائم الزاویه ای با قاعده های a و b و ارتفاع h مفروض است. مستطیلی با بیشترین مساحت ممکنه از این ذوزنقه جدا می‌کنیم. اگر (a) $b=60\ \text{cm}$ و $a=80\ \text{cm}$ و $h=100\ \text{cm}$، (b) $a=24\ \text{cm}$، $b=8\ \text{cm}$ و $h=12\ \text{cm}$ باشد، مساحت این سطح را محاسبه کنید.

۵۵۱ • طول ضلع مربع $ABCD$ معادل $8\ \text{cm}$ است. روی اضلاع AB و BC نقاط P و E را بترتیب با شرط $BP=BE=3\ \text{cm}$ اختیار می‌کنیم. روی اضلاع CD و AD نیز نقاط M و K را طوری اختیار می‌کنیم که ذوزنقه $PEMK$ دارای بیشترین مساحت ممکنه باشد. بیشترین مقدار ممکنه برای مساحت ذوزنقه چقدر است؟

۵۵۲ • در پنج ضلعی $ABCDE$ رئوس A، B و E قائمه بوده و $AB=a$، $AE=b$، $BC=c$ و $DE=m$ است. اگر (a) $a=7\ \text{cm}$، $b=9\ \text{cm}$، $c=3\ \text{cm}$ و $m=5\ \text{cm}$؛ (b) $a=7\ \text{cm}$، $b=9\ \text{cm}$، $c=3\ \text{cm}$ و $m=4\ \text{cm}$ باشد آنگاه در پنج ضلعی مفروض مستطیلی را محاط کنید که بیشترین مساحت را داشته باشد.

۵۵۳ • روی دایره ای دو نقطه A و B مفروض است. روی دایره نقطه C را طوری پیدا کنید که: (a) حاصلضرب $AC\cdot BC$ دارای بیشترین مقدا ممکنه باشد؛ (b) حاصلجمع $AC+BC$ به بیشترین مقدار ممکنه برسد.

۵۵٤ • (a) از بین همهٔ قطاع هایی با محیط P قطاعی را بیابید که دارای بیشترین مساحت ممکنه باشد؛

(b) از بین همهٔ قطاع هایی با مساحت S قطاعی را بیابید که دارای کمترین محیط ممکنه باشد.

۵۵۵ • مقطع عرضی تونلی از یک مستطیل و یک نیمدایره بر بالای آن تشکیل شده است. اگر محیط این مقطع برابر P باشد برای به حداکثر رسیدن مساحت مقطع، شعاع نیمدایره چقدر باید باشد؟

۵۵٦ • فاصلهٔ دو وتر AB در دایره ای به شعاع R از مرکز O برابر h است. در قسمت کوچکتری از دایره که توسط وتر AB جدا شده است مستطیلی را با حداکثر مساحت ممکنه محاط کنید.

۵۵۷ • در دایره ای به شعاع R ذوزنقه‌ای محاط شده است. یکی از قاعده های این ذوزنقه با قطر دایره مساوی است. حداکثر مساحت ممکنه برای چنین ذوزنقه ای را پیدا کنید.

۵۵۸ • (a) ثابت کنید از بین همهٔ مثلث هایی که در آنها زاویه حاده مقابل به قاعده و نیز خود قاعده مساوی است، مثلثی دارای بلندترین میانه وارد بر قاعده است که متساوی الساقین باشد.

(b) ثابت کنید که از بین همهٔ مثلث هایی که در آنها زاویه منفرجه مقابل به قاعده و خود قاعده مساوی است مثلثی دارای کوتاهترین میانه وارد بر قاعده است که متساوی الساقین باشد.

۵۵۹ • خط مستقیم l را از تارک B مثلث ABC رسم می‌کنیم. از نقاط A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع طول های این عمودها درصورتی به حداقل ممکنه می‌رسد که خط l

بر میانه $B\bar{M}$ مثلث ABC عمود باشد.

۵۶۰ ● (a) از بین همهٔ مثلث های متساوی الساقین با مساحت S مثلثی را بیابید که شعاع دایره محاطی به حداقل برسد. شعاع این دایره را محاسبه کنید. (b) بر دایره ای به شعاع r مثلثی را با حداقل مساحت ممکنه محیط کنید. این مساحت را محاسبه کنید.

۵۶۱ ● طول ضلع مربع $ABCD$ برابر $6\,cm$ است. روی اضلاع AD و AB نقاط K و P را طوری انتخاب می‌کنیم که $AK=3\,cm$ و $AP=2\,cm$ باشد. ذوزنقه ای با قاعدهٔ KP را در این مربع محاط کنید. حداقل مساحت ممکنه برای این ذوزنقه چقدر است؟

۵۶۲ ● وتر AB در دایره‌ای برابر شعاع آن است. وتر CD را موازی وتر AB طوری رسم می‌کنیم که ذوزنقه $ABCD$ حداکثر مساحت ممکنه را دارا شود.
اندازهٔ زاویه ای کمان کوچک مقابل به وتر CD را بیابید.

فصل دوم

هندسه فضایی

بخش ۸ ● برش های چند وجهی ها

برش چند وجهی بوسیله صفحه، در اکثر مسائل هندسه فضایی بکار گرفته می‌شود. در بخش حاضر برخی از روشهای رسم برش ها را مورد بحث قرار خواهیم داد. برش هایی را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که بوسیله صفحات مارّ بر یک نقطه و یک خط معین، و سه نقطه معین بوجود می آیند. همچنین برش هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دارای شرط توازی با یک صفحه معین، یک خط معین یا دو خط معین است. مثال هایی از رسم برش هایی که بر یک خط یا یک صفحه معین عمود است در بخش ۹ ارائه شده است. اشکال ۱۰۱ تا ۱۰۶ برش هایی از چهار وجهی و متوازی السطوح را نشان می‌دهند.
در شکل ۱۰۱ برش از یال AB و نقطه M واقع بر یال CD رسم شده است؛ در شکل ۱۰۲ برش از رأس P و نقاط M و N واقع بر یال های AB و BC عبور کرده است؛ در شکل ۱۰۳ برش از رأس C و نقاط M و N واقع بر وجوه ACD و ACB گذشته است. در هر یک از این حالات رسم برش بر قضیه فرعی و ساده زیر از هندسه فضایی مبتنی است:
اگر دو صفحه در دو نقطه مشترک باشند آنگاه خط مستقیم مارّ بر این دو نقطه فصل مشترک صفحات مزبور خواهد بود.

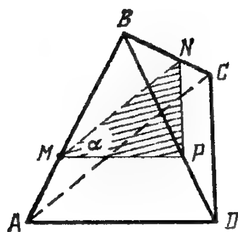
به عنوان مثال در شکل ۱۰۳ نقاط $P=(CM)\bigcap[AD]$ و $Q=(CN)\bigcap[AB]$ به صفحه برش (مقطع) و وجه ADB متعلق بوده و از اینرو پاره‌خط PQ یک ضلع برش محسوب می‌شود. شکل ۱۰٤ برشی از چهار وجهی را بوسیله صفحه ای نشان می‌دهد که از نقطه M واقع بر یال AB به موازات وجه ACD عبور کرده است. رسم برش در این جا بر این نکته استوار است: اگر دو صفحه موازی را صفحه سومی قطع کند در آنصورت فصل مشترک های این صفحه با دو صفحه موازی، موازی خواهد بود. حال صفحه برش را با α نشان می‌دهیم. صفحه ABD صفحات موازی α و ACD را قطع کرده است. فصل مشترک صفحات ABD و ACD خط مستقیم AD بوده و این امر بدین معنی است که فصل مشترک صفحات

ABD و α با خط AD موازی است. از نقطه M خطی به موازات AD رأس کرده و به رأس P در نقطه تلاقی این خط و یال BD وصول می‌یابیم. پاره‌خط MP یک ضلع برش محسوب می‌شود. بطریق مشابه خط MN را بصورت $[AC] \parallel [MN]$ رسم می‌کنیم. پاره‌خط MP ضلع سوم برش بوده و $[DC] \parallel [PN]$ است. برش حاصل مثلث MNP است که متجانس مثلث ACD محسوب می‌شود. نسبت تجانس آنها عبارت از $|BM|/|BA|$ است. شکل ۱۰۵ برشی از متوازی السطوح را نشان می‌دهد که از عبور صفحه ای از نقطه M واقع بر یال CC_1 به موازات صفحه وجه $ABCD$ حاصل شده است. رسم این برش بر روش بکار رفته در مورد قبلی مبتنی است.

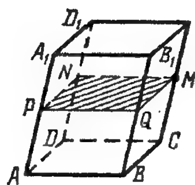
در اینجا $[BC] \parallel [QM]$، $[AB] \parallel [PQ]$، $[DA] \parallel [NP]$، $[C\ \ ] \parallel [MN]$ است.

در همان حال، $[QP] \parallel [MN]$ است زیرا این پاره‌خط ها روی فصل مشترک های صفحات موازی AA_1B_1B و DD_1C_1C با صفحه برش قرار دارند. بطریق مشابه $[QM] \parallel [PN]$ است. برش حاصل متوازی الاضلاعی است که با وجه $ABCD$ برابر است. شکل ۱۰۶ برشی از متوازی السطوح را نشان می‌دهد که از صفحه مارّ بر یال AA_1 و نقطه M واقع بر یال CD تشکیل شده است.

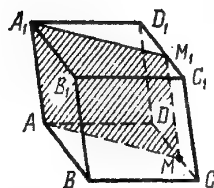
در اینجا $[AA_1] \parallel [MM_1]$، $[AM] \parallel [A_1M_1]$ است زیرا صفحات وجوهی که شامل این اضلاع برش هستند متوازی می‌باشند. برش حاصل نیز عبارت از متوازی الاضلاع AA_1M_1M است.



شکل ۱۰۴



شکل ۱۰۵



شکل ۱۰۶

مثال ۱ ● طول یال مکعبی برابر a است (شکل a۱۰۷). مساحت برشی از مکعب را پیدا کنید که از قطر AD_1 متعلق به وجه AA_1D_1D و M و میانگاه یال BB_1 عبور می‌کند.

حل ● صفحه برش را با α نشان می‌دهیم. پاره‌خط های AD_1 و AM هم به صفحه α و همه به دو وجه از مکعب تعلق دارند. از اینرو اضلاع برش محسوب می‌شوند. ضلع برش را در وجه BB_1C_1C رسم می‌کنیم.

صفحات BB_1C_1C و AA_1D_1D موازی بوده و بنابراین فصل مشترک صفحات α و BB_1C_1C با پاره خط AD_1 موازی خواهند بود. خطوط BC_1 و AD_1 موازی بوده و فصل مشترک نیز با BC_1 موازی خواهد بود.

حال خط مستقیمی را از نقطه M در صفحه BB_1C_1C به موازات خط BC_1 رسم می‌کنیم. محل تلاقی آن با یال B_1C_1 رأس برش را بوجود می‌آورد (شکل ۱۰۷b را نگاه کنید). برش حاصل عبارت از ذوزنقه $AMND_1$ است که در آن $[MN] \parallel [AD_1]$ است. حال اضلاع آن را پیدا می‌کنیم.

رابطه $|AD_1| = a\sqrt{2}$ را داریم. پاره خط MN، میانخط مثلث BB_1C_1 بوده و از اینرو چنین داریم.

$$|MN| = \frac{1}{2}\ |BC_1| = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

در مثلث های قائم الزاویه ABM و D_1C_1N $(|AB| = |C_1D_1| = a \quad |BM| = |NC_1| = a/2)$ $(|\ |)$

به $|AM| = |D_1N| = a\sqrt{5}/2$ وصول می‌یابیم.

از اینرو ذوزنقه $AMND_1$ متساوی الساقین محسوب می‌شود. ارتفاع آن را بدست می‌آوریم (۱۰۷c).

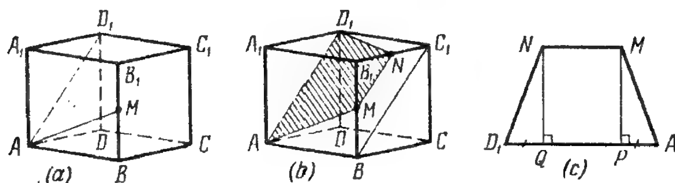
عمودهای PQ و MN را بر قاعده AD_1 رسم کرده و رابطه‌های زیر را بدست می‌آوریم.

$$|PQ| = |MN| = a/\sqrt{2}$$

$$|D_1Q| = |PA| = \frac{1}{2}(|DA| - |QP|) = a/2\sqrt{2}.$$

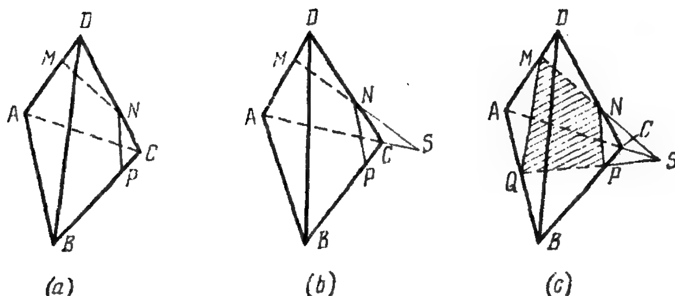
در مثلث قائم الزاویه D_1QN $(|D_1N| = a\sqrt{5}/2, |D_1Q| = a/2\sqrt{2})$ به $|NQ| = a/2\sqrt{2}$ وصول می‌یابیم. مساحت برش بصورت $S = \frac{1}{2}(|MN| + |D_1A|)\ |NQ| = \frac{9}{8}a^2$ درمی‌آید.

جواب مسئله عبارت از $9a^2/8$ خواهد بود.



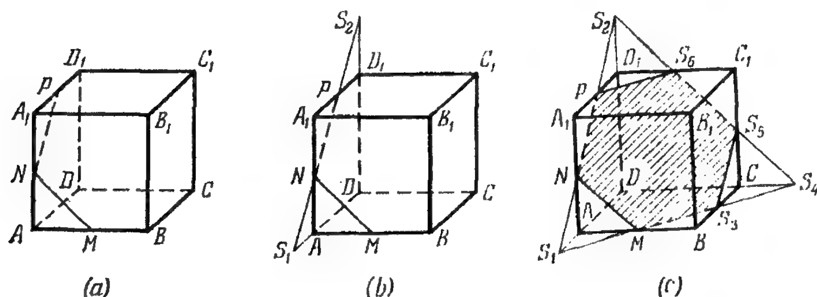
شکل ۱۰۷

در شکل ۱۰۸ برشی از یک چهاروجهی دیده می‌شود. این برش بوسیله صفحه ای بوجود آمده است که از نقاط M، N و P واقع بر یال های چندوجهی عبور می‌کند. نقاط M و N طوری انتخاب شده اند که خطوط MN و AC ناموازی هستند. پاره خط های MN و NP اضلاع برش هستند (شکل ۱۰۸a). نقطه P، نقطه مشترک صفحات MNP و ABC است. نقطه مشترک دوم عبارت از نقطه تلاقی خط های MN و AC یعنی عبارت از $S = (MN) \cap (AC)$ است (شکل ۱۰۸b). خط SP فصل مشترک صفحات MNP و ABC است. نقطه تقاطع این خط و یال AB رأس Q برش یعنی $Q = (SP) \cap [AB]$ را بوجود می‌آورد. برش حاصل عبارت از چهارضلعی $MNPQ$ است.



شکل ۱۰۸

مثال ۲ ● از میانگاه های یال های AB ، AA_1 ، A_1D_1 (شکل ۱۰۹a) صفحه ای را عبور می‌دهیم. شکل برش حاصل را تعیین کنید. اگر طول یال مکعب برابر a باشد مساحت برش را محاسبه کنید.



شکل ۱۰۹

حل ● صفحه برش را با α نشان می‌دهیم. پاره‌خط های MN و NP هم به صفحه α و هم به وجوهی از مکعب تعلق دارند. از اینرو اضلاع برش محسوب می‌شوند (شکل ۱۰۹a). نقاط S_1 و S_2، محل تلاقی پاره‌خط NP واقع در صفحه α و خط های AD و DD_1 را رسم می‌کنیم (شکل ۱۰۹b). خط مستقیم S_1M فصل مشترک صفحات α و $ABCD$ است. نقاط تقاطع S_1M را با یال BC (نقطه S_3 در شکل ۱۰۹c) و با خط CD (نقطه S_4) پیدا می‌کنیم. نقاط S_2 و S_4 ، نقاط مشترک صفحات α و CC_1D_1D است. خط S_2S_4 فصل مشترک این صفحات است. حال نقاط تلاقی خطوط S_2S_4 با یال های CC_1 و C_1D_1 (نقاط S_5 و S_6) را پیدا می‌کنیم. برش مطروحه عبارت از شش ضلعی $PNMS_3S_5S_6$ است. توجه داشته باشید که اضلاع مقابل برش موازی هستند، زیرا آنها روی فصل مشترک های صفحه α با صفحات دو بدو موازی وجوه قرار دارند. حال ثابت می‌کنیم که رئوس S_3 ، S_5 و S_6 برش میانگاههای یال ها هستند. پاره‌خط NP میانخط مثلث AA_1D_1 بوده و از اینرو $(NP) \parallel (AD_1)$ است (شکل ۱۱۰). بطریق مشابه $(MN) \parallel (BA_1)$ بوده و بدلیل $(BA_1) \parallel (CD_1)$ به $(MN) \parallel (CD_1)$ وصول می‌یابیم. بدین ترتیب صفحه α برش با صفحه AD_1C موازی خواهد بود. از اینرو نتیجه می‌شود که فصل مشترک های

این صفحات با یال های مکعب نیز موازی هستند؛ یعنی $[CD_1] \parallel [S_5S_6]$, $[AC] \parallel [MS_3]$ است.
به همین طریق ثابت می‌شود که $\alpha \parallel (BA_1C_1)$، $((MN) \parallel (BA_1), \quad (NP) \parallel (AD_1) \parallel (BC_1))$
است که از آن نیز $[C_1A_1] \parallel [S_6P]$, $[BC_1] \parallel [S_3S_5]$ استنتاج می‌شود. حال $|MA|=|BM|$ را مورد ملاحظه قرار داده و قضیه تالس را سه بار مورد استفاده قرار دهید.

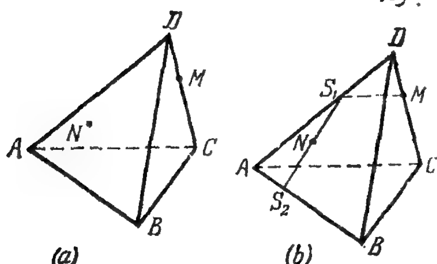
درنتیجه $|C_1S_6| = |S_6D_1|$، $|BS_3| = |S_3C|$, $|CS_5| = |S_5C_1|$ بدست می‌آید. این امر بدین معنی است که نقاط S_3، S_5، S_6 میانگاه های یال ها هستند. از آنچه ثابت شد چنین برمی‌آید طول هر ضلع برش برابر $a/\sqrt{2}$ است. حال ثابت می‌کنیم که هریک اززوایای برش $120°$است.

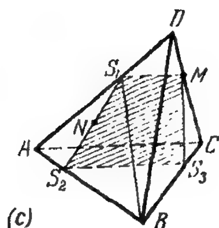
با ملاحظه مثلث S_1MN به آسانی دریافت می‌شود که متساوی الاضلاع است. تساوی مثلث S_1AN و PA_1N (براساس تساوی یک ساق ویک زاویه حاده) موجب $|S_1A| = |PA_1| = a/2$ می‌شود.
آنگاه داریم:

$$|S_1N| = \sqrt{|S_1A|^2 + |AN|^2} = a/\sqrt{2}$$
$$|S_1M| = \sqrt{|S_1A|^2 + |AM|^2} = a/\sqrt{2}$$

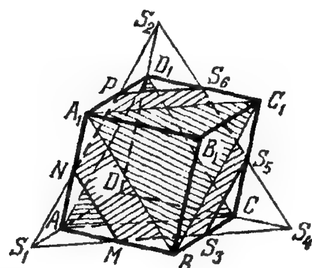
بامنظور کردن $|MN| = a/\sqrt{2}$ متوجه می‌شویم که مثلث S_1MN نیز متساوی الاضلاع بوده و درنتیجه $\angle S_1MN = \angle S_1NM = 60°$ خواهد بود.

از این نکته نتیجه می‌شود که $\angle S_3MN = \angle MNP = 120°$ است. بطریق مشابه با بررسی مثلث های $S_3S_4S_5$، S_6S_2P درمی‌یابیم‌که دیگر زوایای برش نیز برابر$120°$ هستند. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که برش مطروحه، یک شش ضلعی منتظم است که طول هریک از اضلاع آن برابر $a/\sqrt{2}$ است. مساحت این برش برابر $(3\sqrt{3}/4)\,a^2$ خواهد بود.





شکل ۱۱۱



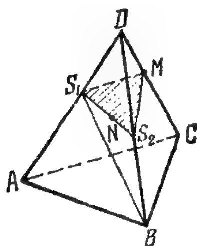
شکل ۱۱۰

شکل ۱۱۱ برشی از یک چهاروجهی را نشان می‌دهد. این برش با صفحه ای به موازات یال AC تشکیل شده است که از نقاط M واقع بر یال CD و N واقع بر وجه ABD عبور می‌کند. رسم این برش بر قضیه زیر استوار است:

اگر صفحه ای از یک خط مستقیم موازی صفحه دیگر عبور کرده و آن صفحه را قطع کند آنگاه فصل مشترک صفحات با خط مزبور موازی خواهد بود. صفحه برش را با α نشان می‌دهیم. صفحه ACD در نقطه M با صفحه α مشترک بوده و دارای خط AC است که با صفحه α موازی است. درنتیجه فصل مشترک این صفحات از نقطه M به موازات خط AC عبور می‌کند. ضلع MS_1 برش را براساس این نکته (شکل b ۱۱۱) یعنی براساس $[MS_1] \parallel [AC]$ رسم می‌کنیم.

با رسم خط S_1N ضلع دوم برش یعنی S_1S_2 را بدست می‌آوریم. در شکل ۱۱۱ نقطه N طوری قرار دارد که نقطه S_2 به یال AB متعلق است. صفحه ABC نیز محتوی خط AC به موازات صفحه برش است. بنابراین ضلع S_2S_3 برش موازی یال AC است (شکل c ۱۱۱). پاره خط S_3M ضلع چهارم برش است.

برش $MS_1S_2S_3$ یک ذوزنقه است که در آن ($[MS_1] \parallel [AC] \parallel [S_2S_3]$) است. براساس موقعیت نقطه N نسبت به پاره خط BS_1 برش می‌تواند یک مثلث نیز باشد (شکل ۱۱۲).



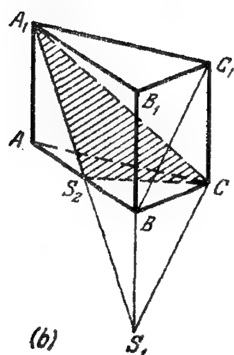
شکل ۱۱۲

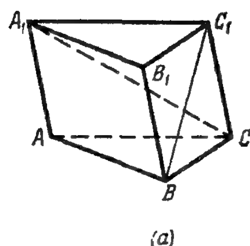
مثال ۳ ● برشی را در منشور مثلثی با عبور دادن صفحه ای از نقاط A_1 و C (شکل a ۱۱۳) به موازات خط BC_1 رسم می‌کنیم. یال AB بوسیله این صفحه به چه نسبتی تقسیم می‌شود.

حل ● صفحهٔ برش را با α نشان می‌دهیم. فصل مشترک صفحات α و BB_1C_1C از نقطه C به موازات خط BC_1 عبور می‌کند (شکل b۱۱۳). نقطه تلاقی آن را با خط BB_1 با S_1 نشان می‌دهیم. نقطه S_1، بین صفحات α و AA_1B_1B مشترک است. نقطه مشترک دیگر A_1 است که در فرض مسئله ارائه شده است. با رسم خط A_1S_1 رأس S_2 برش حاصل می‌شود. برش مطروحه مثلث A_1CS_2 است. حال نسبت $|AS_2|/|S_2B|$ را تعیین می‌کنیم.

از تشابه مثلث های A_1AS_2 و S_1BS_2 به $|AS_2|/|S_2B| = |AA_1|/|BS_1|$ وصول می‌یابیم.

چون S_1BC_1C یک متوازی الاضلاع است ($[BS_1] \parallel [C_1C],\ [BC_1] \parallel [S_1C]$) از اینرو داریم: $|BS_1| = |C_1C|$. با منظور کردن $|C_1C| = |AA_1|$ به $|AS_2|/|S_2B| = 1/1$ دست می‌یابیم.





شکل ۱۱۳

مثال ٤ ● نقطه M روی یال AB از یک چهار وجهی طوری قرار گرفته است که رابطه زیر را داریم: $|AM|/|AB| = \lambda, \quad 0 < \lambda < 1$ (شکل ۱۱٤a). از نقطه M به موازات یال های AD و BC صفحه ای عبور می‌دهیم. برش حاصل از عبور این صفحه را در چهار وجهی رسم کنید.

اگر $|AD|/|BC| = m$ باشد به ازاء چه مقدار λ برش حاصل یک لوزی خواهد بود؟

حل ● صفحه برش را با α نشان می‌دهیم. فصل مشترک این صفحه و صفحه ABD با خط AD موازی است $((AD)\|(\alpha))$. خط MN را بصورت $[MN] \| [AD]$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۱٤b). فصل مشترک های صفحات BCA و BCD با صفحه α موازی خط BC $((BC) \| \alpha)$ هستند. خطوطی را بصورت $[MQ] \| [BC]$ و $[NP] \| [BC]$ رسم می‌کنیم. PQ ضلع چهارم برش با یال AD موازی است.

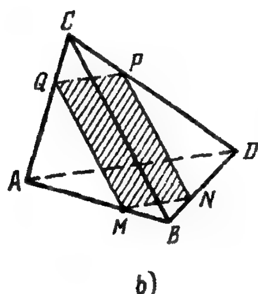
برش مطروحه عبارت از متوازی الاضلاع $MNPQ$ $([MQ]\|[BC]\|[NP], [PQ]\|[AD]\|[MN])$ است. طول اضلاع متوازی الاضلاع $MNPQ$ را برحسب طول یال های AD و BC بیان می‌کنیم.

تشابه مثلث های AMQ و ABC به $|MQ|/|BC| = |AM|/|AB| = \lambda$ منجر می‌شود که از آن نیز $|MQ| = \lambda\,|BC|$ بدست می‌آید.

حال درمی‌یابیم که $|BM| = |AB| - |AM| = (1-\lambda)\,|AB|$ بوده و از تشابه مثلث های BMN و BAD نیز به

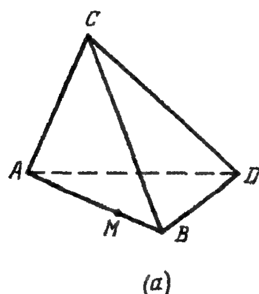
$|MN|/|AD| = |BM|/|BA| = 1-\lambda$ یعنی $|MN| = (1-\lambda)\,|AD|$ وصول می‌یابیم.

با جاگذاری عبارات حاصله در معادله $|MQ| = |MN|$ تساوی $\lambda\,|BC| = (1-\lambda)\,|AD|$ حاصل می‌شود. از این تساوی رابطهٔ $\lambda = \dfrac{|AD|}{|BC|+|AD|} = \dfrac{m}{m+1}$ بدست می‌آید. بنابراین برش مطروحه به ازاء $\lambda = m/(m+1)$ لوزی خواهد بود.



b)

شکل ۱۱٤

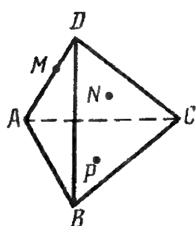


(a)

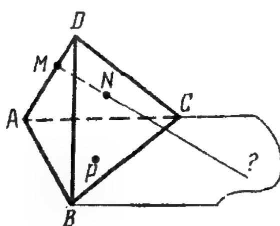
توجه ● اگر یال های متقابل AL و BC از یک چهار وجهی متعامد باشند آنگاه اضلاع MN و MQ برش که موازی آنها هستند متعامد خواهند بود. در این حالت برش یک مستطیل بوده و به ازاء $\lambda = m/(m+1)$ مربع خواهد بود. بخصوص اگر چهار وجهی $ABCD$ منتظم باشد آنگاه برش مرسوم از میانگاه یال AB به موازات یال های BC و AD یک مربع خواهد بود. برای پیدا کردن برش چند وجهی در مثال های بالا در صفحات وجوه (یا فقط در خود وجوه) چند وجهی ترسیماتی را انجام دادیم. در برخی از مسائل برای یافتن برش ها لازم است که در خارج صفحات وجوه ترسیماتی را انجام دهیم. به عنوان مثال برشی از چهار وجهی $ABCD$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این برش با صفحه MNP بوجود آمده است. همانطوریکه در شکل ۱۱۵a دیده می‌شود در این صفحه M، N و P روی یال AD، وجه BCD و وجه ABC از چهار وجهی با شرط $(MN) \nparallel (ABC)$ قرار دارد. براساس اطلاعات ارائه شده در اینجا برای هریک از وجوه چند وجهی و صفحه برش MNP فقط یک نقطه مشترک شناخته شده است. برای رسم فصل مشترک های هر وجهی با صفحه MNP لازم است که یک نقطه مشترک دیگر بین آنها نیز یافته شود. صفحه ABC را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. نقطه F، نقطه مشترک صفحات ABC و MNP است. نقطه مشترک دوم بین آنها عبارت از نقطه تقاطع خط MN و صفحه ABC است $((MN) \nparallel (ABC))$. این نقطه را چگونه می‌توان رسم کرد؟ (شکل ۱۱۵b؛ به عنوان مقایسه به شکل ۱۰۸b مراجعه کنید). جواب در شکل ۱۱۵c ارائه شده است. صفحه ای را از نقاط M و N و رأس D چند وجهی عبور داده و AS_1 فصل مشترک آن را با ABC رسم می‌کنیم. S_2 نقطه مشترک خطوط MN و AS_1 دقیقاً نقطه تلاقی خط MN و صفحه ABC محسوب می‌شود. خط PS_2 فصل مشترک صفحات MNP و ABC است. رئوس S_3 و S_4 (شکل ۱۱٦) به عنوان نقطه تلاقی خط PS_2 با یال های BC و AB یافته می‌شوند و تلاقی خط S_3N و یال CD رأس S_5 را بوجود می‌آورد. برش مطروحه عبارت از چهار ضلعی $MS_4S_3S_5$ خواهد بود. شکل ۱۱۷ a-c نشان می‌دهد که برش چند وجهی را چگونه با سه نقطه رسم کنیم: M در وجه ABC، N در وجه BCD و P در وجه ACD $((MN) \nparallel (ACD))$.
برای یافتن نقطه تلاقی خط MN و صفحه ACD یک صفحه کمکی را از آن خط و رأس B چند وجهی عبور می‌دهیم (شکل ۱۱۷b). خط S_1S_2 فصل مشترک صفحه مزبور و صفحه ACD است.

نقطه $(S_1S_2)\cap(MN)=S_3$ نقطه تلاقی خط MN و صفحه ACD است. سایر عملیات (شکل ۱۱۷c) همچون حالت قبل انجام می‌شوند.

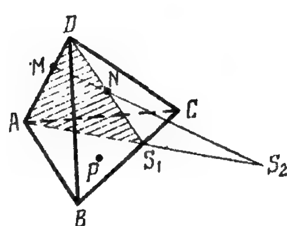
در دو مثال اخیر برای رسم نقطه تلاقی خط MN و صفحه وجه چند وجهی (وجه ABC در شکل ۱۱۵c، وجه ACD در شکل ۱۱۷c)، رسم صفحه کمکی از آن خط و یکی از رئوس چند وجهی ((MDN) در شکل ۱۱۵c، (MBN) در شکل ۱۱۷b) ضروری است. در هرم و بویژه در چند وجهی غالباً مناسب بنظر می‌رسد که صفحه کمکی را از خط مفروض و یک رأس عبور دهیم.



(a)

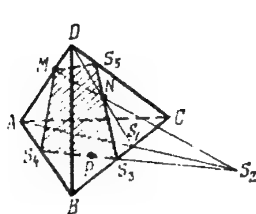


(b)

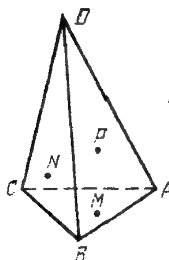


(c)

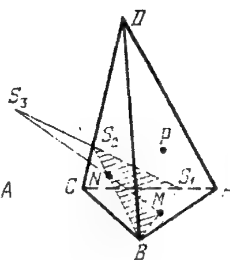
شکل ۱۱۵



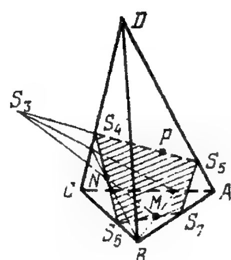
شکل ۱۱۶



(a)



(b)



(c)

شکل ۱۱۷

مثال ۵ ● برشی از متوازی السطوحی را رسم کنید که بوسیله صفحه ای ایجاد می‌شود که آن صفحه از میانگاه های M و N یال های AD و BB_1 و نقطه P، محل تلاقی اقطار وجه $A_1B_1C_1D_1$ عبور می‌کند (شکل ۱۱۸a). این صفحه یال AB را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.

حل ● رسم این برش در شکل (شکل d ــ ۱۱۸) نشان داده شده است. صفحه برش را با α بصورت $\alpha=(MDN)$ نشان می‌دهیم. ابتدا نقطه تلاقی خط NP و صفحه AA_1D_1D را بدست می‌آوریم. این خط روی صفحه BB_1D_1D قرار دارد که صفحه AA_1D_1D را روی خط DD_1 قطع می‌کند. نقطه S_1 محل تلاقی خطوط NP و DD_1 (شکل ۱۱۸b) نقطه مطلوب است. بطریق مشابه، S_2، نقطه تلاقی خط

NP و صفحه $ABCD$ یعنی $S_2 = (NP) \cap (DB)$ یافته میشود. صفحه α صفحه AA_1D_1D را در امتداد خط S_1M و صفحه $ABCD$ را در امتداد S_2M قطع می‌کنند. حال دو رأس برش را در اختیار داریم: $S_3 = (S_1M) \cap [D_1A_1]$ و $S_4 = (S_2M) \cap [AB]$ (شکل ۱۱۸c).

نقطه $S_5 = (S_3P) \cap [B_1C_1]$ آخرین رأس برش است. توجه دارید که خطوط S_5N و S_2M خط BC را در همان نقطه $S_6 = (BC) \cap \alpha$ قطع می‌کنند.

پنج ضلعی $MS_3S_5NS_4$ برش مطلوب است (شکل ۱۱۸d). اضلاع S_3S_5 و MS_4 و نیز اضلاع MS_3 و S_5N برش موازی هستند زیرا آنها روی وجوه موازی قرار دارند. حال نسبت $|AS_4|/|S_4B|$ را بدست می‌آوریم.

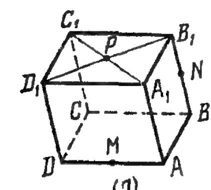
از تشابه مثلث های MAS_4 و S_6BS_4 (شکل ۱۱۸c) به $|AS_4|/|BS_4|=|AM|/|BS_6|$ دست می‌یابیم.

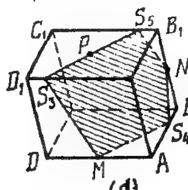
تساوی مثلث های BS_6N و B_1S_5N (نقطه N میانگاه یال BB_1 است) موجب $|BS_6| = |B_1S_5|$ می‌شود. از این گذشته نقطه P مرکز تقارن متوازی الاضلاع $A_1B_1C_1D_1$ است و درنتیجه $|B_1S_5|=|D_1S_3|$ خواهد بود. بدین ترتیب به $|BS_6| = |D_1S_3|$ وصول می‌یابیم.

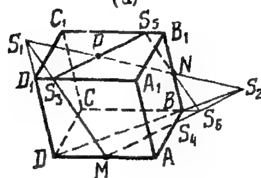
با منظور کردن $|AM| = |DM|$ نیز $|AS_4|/|BS_4| = |DM|/|D_1S_3|$ حاصل می‌شود. از تشابه مثلث های DS_1M و $D_1S_1S_3$ به $|DM|/|D_1S_3| = |DS_1|/|D_1S_1|$ وصول می‌یابیم.

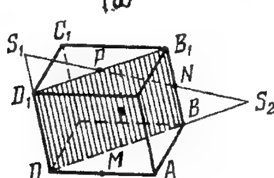
(شکل ۱۱۸b) (برحسب تساوی یک ضلع و زوایای مجاور به آن) موجب $|B_1N| = |D_1S_1|$ تشابه مثلث های S_1D_1P و NB_1P می‌شود.

با در نظر گرفتن $|D_1D| \frac{1}{2} = |B_1B| \frac{1}{2} = |B_1N|$ رابطه $|D_1D| \frac{1}{2} = |D_1S_1|$ و درنتیجه $|DD_1| \frac{3}{2} = |DS_1|$ بدست می‌آید. آنگاه بترتیب $|DM|/|D_1S_3| = |DS_1|/|D_1S_1| = 3/1$، $|AS_4|/|BS_4| = |DM|/|D_1S_3| = 3/1$ را خواهیم داشت. بنابراین یال AB از طرف رأس A به نسبت $3:1$ تقسیم می‌شود.









شکل ۱۱۸

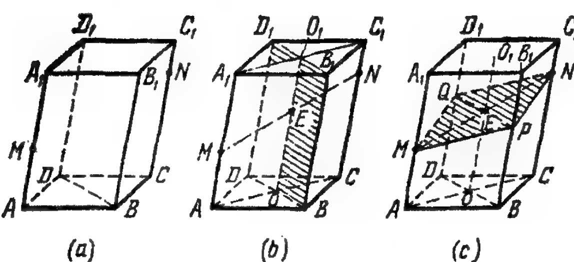
مثال ۶ ● نقاط M و N روی یال های AA_1 و CC_1 از متوازی السطوحی طوری قرار دارد که $m = |AA_1|/|AM|$ است (شکل a ۱۱۹). برشی از متوازی السطوحی را رسم کنید که با صفحه مار بر نقاط M و N، به موازات قطر BD قاعده حاصل می‌شود. این صفحه یال BB_1 را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

حل ● قبلاً مثال هایی را در مورد رسم برشی به موازات خط معینی مورد ملاحظه قرار داده ایم (اشکال ۱۱۱ ـــ ۱۱۳). مثال حاضر از این جهت با مثال های قبلی متفاوت است که هیچیک از نقاط M و N برش، در روی صفحه $ABCD$ محتوی خط BD به موازات برش، قرار ندارند. اضلاع برش که از رئوس M و N ناشی می‌شوند با خط BD موازی نیستند زیرا این خط وجوه محتوی اضلاع مزبور را قطع می‌کند. صفحه برش را با α نشان می‌دهیم. خط BD در صفحه BB_1D_1D (شکل b ۱۱۹) قرار دارد. درنتیجه صفحات α و BB_1D_1D در امتداد خط موازی با BD همدیگر را قطع می‌کنند. نقطه تلاقی خط MN در صفحه α را با صفحه BB_1D_1D رسم می‌کنیم. صفحه AA_1C_1C محتوی خط MN صفحه BB_1D_1D را در امتداد خط OO_1 قطع می‌کند که موازی یال های جانبی متوازی السطوح است. E، نقطه مشترک خط MN و OO_1 دقیقاً عبارت از نقطه اشتراک خط MN و صفحه BB_1D_1D است. حال خطی به موازات خط BD از نقطه E در صفحه BB_1D_1D رسم کرده ونقاط تلاقی P و Q را بترتیب با یال های BB_1 و DD_1 پیدا می‌کنیم (شکل c ۱۱۹). خط PQ فصل مشترک صفحات α و BB_1D_1D بوده ودر نتیجه نقاط P و Q رئوس برش خواهند بود. این برش عبارت از متوازی الاضلاع BB_1D_1D است که در آن $[PN] \parallel [MQ]$ و $[QN] \parallel [MP]$ می‌باشد. حال نسبت $|BP|/|PB_1|$ را بدست می‌آوریم. بدلیل اینکه $BOEP$ متوازی الاضلاع است و OE میانخط ذوزنقهٔ $AMNC$ است رابطهٔ $|OE| = |BP|$ را داریم و از آن نیز چنین داریم: $|OE| = \frac{1}{2}(|AM| + |CN|)$.

با منظورکردن $|AM| = m\,|AA_1|$، $|CN| = n\,|CC_1|$ و $|AA_1| = |CC_1| = |BB_1|$ نتیجه می‌شود که: $|BP| = |OE| = \frac{m+n}{2}\,|BB_1|$. آنگاه چنین بدست می‌آید:

$$|PB_1| = |BB_1| - |BP| = \frac{2-m-n}{2}\,|BB_1|, \quad |BP|/|PB_1| = \frac{m+n}{2-m-n}$$

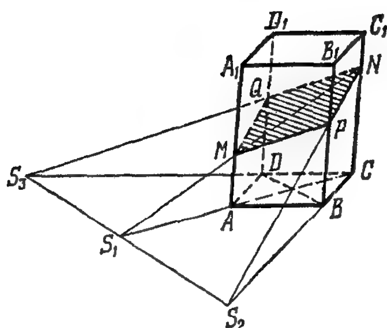
بنابراین یال BB_1 از طرف رأس B به نسبت $\frac{m+n}{2-m-n}$ تقسیم می‌شود.



شکل ۱۱۹

توجه ● در مثال ۶ هر صفحه دیگری مثل صفحه $ABCD$ را می‌توانیم بجای صفحه BB_1D_1D اختیار کنیم. رسم های متناظر به آن در شکل ۱۲۰ نشان داده شده است

$(S_1 = (MN) \cap (AC),\ (S_2S_3) \parallel (BD))$.



شکل ۱۲۰

مثال ۷ ● روی قطر AB_1 از وجه ABB_1A_1 منشور مثلث القاعده (شکل a ۱۲۱) نقطه M طوری قرار گرفته است که $|AM|/|MB_1| = 5/4$ را داریم. برشی از منشور را رسم کنید که با صفحه مار بر نقطه M به موازات اقطار A_1C و از وجه دیگر بوجود آمده است. یال CC_1 با این صفحه به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

حل ● در مثال ٤ مسئله ای را مورد ملاحظه قرار دادیم که رسم برشی را توضیح می‌داد که از نقطه معینی به موازات دو خط معین دیگر رسم شده بود. مسئله حاضر با مسئله ٤ در این نکته تفاوت دارد که هیچیک از خطوط A_1C و BC_1 موازی برش روی صفحه وجه ABB_1A_1 که محتوی نقطه M برش است قرار ندارند. هردوی این خطوط صفحه ABB_1A_1 را قطع می‌کنند. بنابراین همچون مثال ٤ بلافاصله نمی‌توانیم به رسم برش از نقطه M اقدام کنیم. درچنین مواردی غالباً مناسب بنظر می‌رسد که با رسم برش کمکی به موازات خطوط مفروض اقدام شود. صفحه ای از خط مستقیم A_1C به موازات خط BC_1 رسم می‌کنیم (شکل b ۱۲۱، $(C_1B) \parallel (CS_1)$، به مسئله 3 نگاه کنید، شکل ۱۱۳). مثلث A_1S_2C برشی از منشور است که بوسیله صفحه مزبور بوجود آمده است. صفحه برش مطلوب را با α نشان می‌دهیم. این صفحه موازی فصل مشترک های A_1C و CS_1 از صفحه A_1CS_1 بوده و بنابراین $(A_1CS_1) \parallel \alpha$ خواهد بود. از اینرو نتیجه می‌شود که اضلاع برش مطلوب با اضلاع برش A_1S_2C که بر روی یک وجه یا وجوه موازی قرار دارند موازی است. حال می‌توان برش مطلوب را رسم کرد. خط مستقیمی را از نقطه M به موازات خط A_1S_2 رسم‌کرده و نقاط تلاقی آن با یال ها یعنی نقاط S_3 و S_4 را پیدا می‌کنیم (شکل c ۱۲۱). سپس اضلاع $[S_2C] \parallel [S_4S_5]$ و $[BC_1] \parallel [S_5S_6]$ (بدلیل $[BC_1] \parallel \alpha$) و $[CA_1] \parallel [S_6S_7]$ را رسم می‌کنیم.

پنج ضلعی $S_3S_4S_5S_6S_7$ برش مطلوب است. (توجه دارید که $[S_3S_7] \parallel [S_4S_5]$ است). حال نسبت $|CS_6|/|S_6C_1|$ را محاسبه می‌کنیم. وجه AA_1B_1B را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

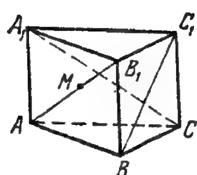
از تشابه مثلث های AS_4M و B_1S_3M رابطه $|AS_4|/|B_1S_3| = |AM|/|B_1M| = 5/4$ را داریم. عبارت $x = |S_2S_4|/|AB|$ را منظور می‌کنیم. همچنین با در نظر گرفتن $|AS_2| = \frac{1}{2}|AB|$، $|S_2S_4| = |A_1S_3|$ و $|AB| = |A_1B_1|$ به $|AS_4| = \left(\frac{1}{2} + x\right)|AB|$،

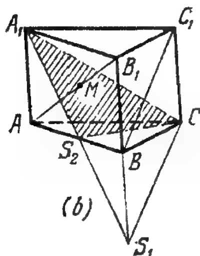
$|AB|$ $(x-1)$ $= |B_1S_3|$ وصول می‌یابیم. معادله $5/4 = (1-x)/\left(\frac{1}{2}+x\right)$ بدست می‌آید که از آن نیز $x=1/3$ بدست می‌آید.

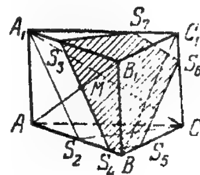
این امر به معنی $|AB|$ $\frac{1}{3}$ $= |S_2S_4|$ است که از آن رابطه زیر استنتاج می‌شود.

$$|S_4B| = |S_2B| - |S_2S_4| = \frac{1}{6}|AB|$$

بدلیل $[S_2C] \parallel [S_4S_5]$ رابطه $2 = |S_2S_4|/|S_4B| = |CS_5|/|S_5B|$ را داریم و با توجه به $[BC_1] \parallel [S_5S_6]$ رابطه $2 = |CS_5|/|S_5B| = |CS_6|/|S_6C_1|$ استنتاج می‌شود. بنابراین یال CC_1 از طرف رأس C به نسبت $2/1$ تقسیم می‌شود.







شکل ۱۲۱

مثال ۸ ● نقاط M و N روی اقطار AB_1 و BC_1 از وجوه مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ طوری قرارگرفته اند که پاره‌خط MN موازی وجه $ABCD$ است.

نسبت های $|AM|/|AB_1|$ و $|BN|/|BC_1|$ را با شرط $|MN|/|AB| = \sqrt{5}/3$ بدست آورید.

حل ● طبق فرض $(MN) \parallel (ABCD)$ را در نظر بگیرید. خط مستقیم S_1S_2 را از نقطه M واقع بر وجه AA_1B_1B (شکل ۱۲۲) به موازات AB رسم می‌کنیم. صفحه ای را که خطوط MN و S_1S_2 تعریف می‌کنند با صفحه $ABCD$ موازی است. برشی از مکعب که توسط مربع $S_1S_2S_3S_4$ ایجاد شده است با وجه $ABCD$ برابر است. عبارات $|AB| = a$ ، $|AM|/|AB_1| = x$ را در نظر می‌گیریم. از تشابه مثلث های MB_1S_2 و AB_1B تساوی $|B_1S_2|/|B_1B| = |MS_2|/|AB| = |MB_1|/|AB_1|$ بدست می‌آید. با منظور کردن $|MB_1| = (1-x)|AB_1|$ به روابط زیر وصول می‌یابیم:

$$|MS_2| = (1-x)|AB| = (1-x)a, \quad |B_1S_2| = (1-x)|BB_1|,$$

$$|BS_2| = |BB_1| - |B_1S_2| = x|BB_1|$$

تشابه مثلث های BS_2N و BB_1C_1 رابطه

$$|S_2N|/|B_1C_1| = |BN|/|BC_1| = |BS_2|/|BB_1| = x$$

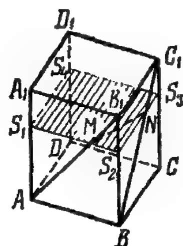
را موجب شده و از اینرو $|S_2N| = xa$ و $|BN|/|BC_1| = |AM|/|AB_1| = x$ استنتاج می‌شود.

در مثلث قائم الزاویه MS_2N روابط $|MN|=\frac{\sqrt{5}}{3}a$، $|S_2M|=xa$ ، $|MS_2|=(1-x)a$ را داریم. درنتیجه طبق قضیه فیثاغورس رابطه زیر حاصل می‌شود.

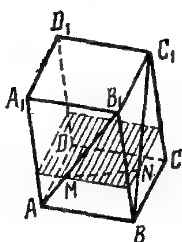
$$\frac{5}{9}a^2=(1-x)^2a^2+x^2a^2,\ \ 9x^2-9x+2=0$$

ریشه های این معادله عبارت از $x_2=1/3$ و $x_1=2/3$ است. بدین ترتیب برای خط MN دو موقعیت وجود دارد که در شرط مسئله صدق می‌کند. شکل ۱۲۲ موقعیت اول و شکل ۱۲۳ موقعیت دوم را نشان می‌دهد. جواب مسئله بصورت زیر خواهد بود.

$$|AM|/|AB_1|=|BN|/|BC_1|=1/3 \quad \text{یا} \quad |AM|/|AB_1|=|BN|/|BC_1|=2/3$$



شکل ۱۲۲



شکل ۱۲۳

توجه ● در حل مسائلی که از خط MN به موازی $ABCD$ صفحه ای رسم می‌شود حکم زیر برقرار است:

قضیه ● از یک خط مستقیم که موازی صفحه معینی است صفحه ای را می‌توان به موازات آن صفحه عبور داد و این صفحه تکین است.

اثبات: برای اثبات قضیه از نقطه ای واقع بر روی خط مفروض خط دیگری را به موازات صفحه مفروض تعریف می‌کنند. منحصر بفرد بودن این صفحه از این نکته استنتاج می‌شود که از یک نقطه فقط یک صفحه می‌توان به موازات صفحه معینی رسم کرد.

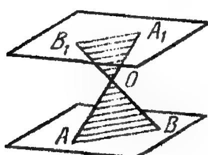
مثال ۹ ● نقاط M و N میانگاه های یال های AD و BB_1 از یک متوازی السطوح هستند (شکل a ۱۲٤). در این متوازی السطوح $|MN|=a$ بوده و اقطار وجه $A_1B_1C_1D_1$ در نقطه P همدیگر را قطع می‌کنند. خط مارّ بر نقطه P به موازات خط MN صفحه AA_1D_1D را در نقطه Q قطع می‌کند. طول پاره خط PQ را محاسبه کنید.

حل ● برای حل این مسئله برشی از متوازی السطوح را که بوسیله صفحه MNP ایجاد می‌شود می‌توان مورد استفاده قرار داد. یعنی فصل مشترک صفحات MNP و AA_1D_1D را رسم کرده و نقطه Q را روی آن پیدا می‌کنیم (ترسیمات در شکل b ۱۲٤ نشان داده شده است). در مورد این مسئله از دو قضیه ساده زیر استفاده می‌کنیم:

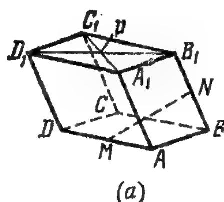
(1) قطعاتی از دو خط موازی واقع بین دو صفحه موازی دارای طول های متفاوت هستند.

(2) اگر دو خط متقاطع در نقطه O با دو صفحه بترتیب در نقاط A و A_1، B و B_1 محدود شده باشند آنگاه

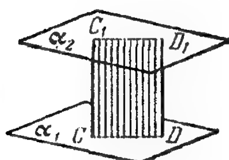
$|OB_1|/|BO| = |OA_1|/|AO|$ خواهد بود. برهان این قضایا را می‌توان براساس اشکال ۱۲۵ و ۱۲۶ به آسانی انجام داد. حال به حل مسئله می‌پردازیم. نقطه R را نقطه تلاقی پاره‌خط PQ وصفحه BB_1C_1C درنظر می‌گیریم. برطبق قضیه اول طول پاره خط های موازی QR و MN واقع بین صفحات موازی AA_1D_1D و BB_1C_1C مساوی است. یعنی $a = |MN| = |QR|$ است. پاره‌خط های QR و D_1B_1 واقع در بین همان دوصفحه در نقطه P با شرط $|D_1P|/|PB_1| = 1$ همدیگر را قطع می‌کنند. آنگاه طبق قضیه دوم $|QP|/|PR| = 1$ یعنی $|QP| = |PR| = a/2$ را خواهیم داشت و جواب مسئله عبارت از $a/2$ خواهد بود.



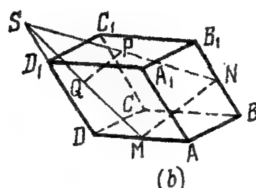
شکل ۱۲۵



شکل ۱۲۴

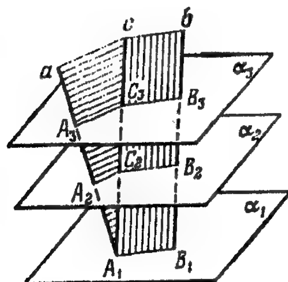


شکل ۱۲۶



توجه ● حال علاوه بر قضایای (1) و (2) قضیه دیگری را ذیلاً صورتبندی می‌کنیم:

اگر خطوط a و b بوسیله سه صفحه موازی بترتیب در نقاط A_1، A_2، A_3 و B، B_2، B_3 قطع شوند آنگاه $|B_1B_2|/|B_2B_3| = |A_1A_2|/|A_2A_3|$ خواهد بود.



شکل ۱۲۷

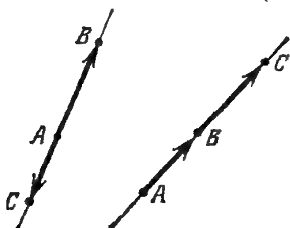
این قضیه را براساس شکل ۱۲۷ می‌توان اثبات کرد. خطوط a و b می‌توانند موازی، متقاطع یا مورب باشند. با استفاده از این گزاره می‌توان بلافاصله درمثال ۸ ادعا کرد که $|AB_1|/|AM| = |BC_1|/|BN|$ است (شکل ۱۲۲).

بخش ۹ ● استفاده ازضوابط همخطی وهمصفحگی بردارها درحل مسائل

ضوابط همخطی و همصفحگی بردارها اساس کاربرد جبر برداری را درحل مسائل هندسه فضایی

تشکیل می‌دهد. این ضوابط بیان گزاره های گوناگون مربوط به وضعیت نقاط، خطوط و صفحات را در فضا بصورت تساوی های برداری ممکن می‌سازد.

1° • در مورد سه نقطه متمایز A، B و C که روی یک خط مستقیم قرار دارند لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ همخط باشند. یعنی بایستی عددی مانند λ وجود داشته باشد که در $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ صدق کنند. برهان این حکم مستقیماً از تعریف بردارهای همخط و ناشی شدن بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ از نقطه A استنتاج می‌شود (شکل ۱۲۸).



شکل ۱۲۸

مثال ۱ • در یک متوازی السطوح (شکل ۱۲۹) از M میانگاه یال BC خطی را طوری رسم می‌کنیم که خطوط AC_1 و DD_1 را بترتیب درنقاط N و P قطع کنند. نسبت $|MN|/|NP|$ را بدست آورید.

حل • جهت اختصار سه بردار ناهمصفحهٔ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AA_1}$ را بترتیب با $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ نشان داده و بردارهای دیگر را برحسب این بردارها حل می‌کنیم. نقطه N روی خط AC_1 قرار دارد. بنابراین بردار $\overrightarrow{NA}$ با بردار ناصفر $\overrightarrow{AC_1}$ همخط بوده و $\overrightarrow{NA} = x\overrightarrow{AC_1}$ را خواهیم داشت.

در مورد بردار $\overrightarrow{AC_1}$ تساوی $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ را داریم که به معنی $\overrightarrow{NA}=x(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ است.

بردار $\overrightarrow{NM}$ عبارت از مجموع بردارهای $\overrightarrow{NA}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BM}$ است: $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$.

با جاگذاری معادل بردار $\overrightarrow{NA}$ در این تساوی و با یادآوری:

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$$

چنین حاصل می‌شود:

$$\overrightarrow{NM}=(1+x)\,\mathbf{a}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\mathbf{b}+x\mathbf{c}$$

بردارهای $\overrightarrow{DP}$ و $\overrightarrow{DD_1}$ همخط بوده و $\overrightarrow{DD_1}=\mathbf{c}$ است. بنابراین $\overrightarrow{DP}=y\mathbf{c}$ خواهد بود.

از $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$ چنین استنتاج می‌شود:

$$\overrightarrow{NP}=x\mathbf{a}+(1+x)\,\mathbf{b}+(x+y)\,\mathbf{c}$$

طبق حکم 1° که فوقاً صورتبندی شده است برای نقاط M، N و P که روی یک خط قرار دارند لازم و کافی است که تساوی برداری زیر برقرار باشد:

$$\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{NP}$$

با جاگذاری معادل بردارهای $\overrightarrow{NM}$ و $\overrightarrow{NP}$ در این رابطه چنین حاصل می‌شود:

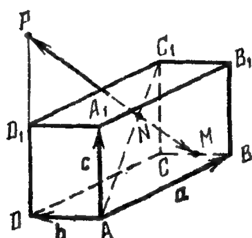
$$(1+x)\,\mathbf{a}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\mathbf{b}+x\mathbf{c}=\lambda x\mathbf{a}+\lambda(1+x)\,\mathbf{b}+\lambda(x+y)\,\mathbf{c}$$

با توجه به منفرد بودن تجزیه بردار، این تساوی برداری با دستگاه مشتمل بر سه معادله اسکالر زیر هم ارز است:

$$\begin{cases} 1+x=\lambda x, \\ \frac{1}{2}+x=\lambda(1+x) \\ x=\lambda(x+y) \end{cases}$$

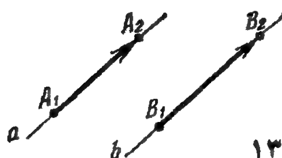
با حل این دستگاه $\lambda=-1/2,\ x=-2/3,\ y=2$ بدست می‌آید.

بدین ترتیب $\overrightarrow{NM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$ را داریم که از آن نیز $|\overrightarrow{NM}|=\frac{1}{2}|NP|$ بـدست می‌آید. بنابراین جواب مسئله عبارت از $2:1$ خواهد بود.



شکل ۱۲۹

2° ● فرض کنید که A_1 و A_2 نقاط متمایزی از خط a، B_1 و B_2 نیز نقاط متمایزی از خط b باشد. برای توازی خطوط a و b لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$ و $\overrightarrow{B_1B_2}$ همخط باشند. یعنی بایستی عددی مانند λ موجود باشد که در $\overrightarrow{B_1B_2}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ صدق کند. برهان این حکم از تعریف بردارهای همخط و قرار گرفتن پاره‌خط A_1A_2 روی خط a و پاره‌خط B_1B_2 روی خط b مستقیماً استنتاج می‌شود (شکل ۱۳۰).



شکل ۱۳۰

مثال ۲ ● در متوازی السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ خطوط AC و DC_1 اقطار وجوه آن هستند. ثابت کنید که زوج نقطه‌ای بصورت $M\in(AC)$ و $N\in(DC_1)$ وجود دارد که در $(MN)\|(BD_1)$ صدق کرده و این زوج منحصر بفرد است. نسبت $|MN|/|BD_1|$ را بیابید.

حل ● فرض کنید که M نقطه‌ای روی خط AC و N نقطه‌ای روی خط C_1D است (شکل ۱۳۱). طبق حکم 2° برای توازی خطوط MN و BD_1 لازم و کافی است که عددی مانند λ وجود داشته باشد که در $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$ (1) صدق کند.

بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{BD_1}$ را در امتداد بردارهای $\overrightarrow{CD}$، $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CC_1}$ تجزیه می‌کنیم. این بردارها را بترتیب

با **b** ، **a** و **c** نشان می‌دهیم. تساوی $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1}$ را داریم.
در اینجا $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = -\mathbf{b}, \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{CD} = \mathbf{a}$ بوده و از اینرو $\overrightarrow{BD_1}=\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (2) را داریم. بردار $\overrightarrow{MN}$ را بصورت مجموع $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1N}$ نشان می‌دهیم. در اینجا بردار $\overrightarrow{MC}$ با بردار $\overrightarrow{CA}$ همخط بوده و بنابراین $\overrightarrow{MC} = x\overrightarrow{CA}$ خواهد بود. ولی $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ را داریم که به معنی $\overrightarrow{MC} = x\mathbf{a} + x\mathbf{b}$ است. بردار $\overrightarrow{C_1N}$ با بردار $\overrightarrow{C_1D}$ همخط بوده و $\overrightarrow{C_1D}= \mathbf{a} - \mathbf{c}$ است. درنتیجه $\overrightarrow{C_1N} = y\overrightarrow{C_1D} = y\mathbf{a} - y\mathbf{c}$ خواهد بود. از اینرو تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$(3) \qquad \overrightarrow{MN} = (x + y)\, \mathbf{a} + x\mathbf{b} + (1 - y)\, \mathbf{c}$$

با جاگذاری تجزیه های برداری (2) و (3) در رابطه (1) چنین حاصل می‌شود:

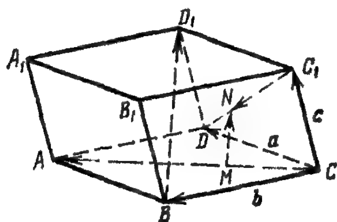
$$(x + y)\, \mathbf{a} + x\mathbf{b} + (1 - y)\, \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$$

این تساوی برداری با دستگاه زیر هم ارز است:

$$\begin{cases} x+y= \lambda \\ x= -\lambda \\ 1-y= \lambda \end{cases}$$

با حل این دستگاه $\lambda = 1/3,\ x = -1/3,\ y = 2/3$ بدست می‌آید. این امر بدین معنی است که نقاط M و N در موقعیتی قرار دارند که برحسب آن $(MN)\|(BD_1)$ بوده و این موقعیت منحصر بفرد است. براساس مقادیر x و y چنین حاصل می‌شود:

$$CM = -x\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{C_1N} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1D}$$



شکل ۱۳۱

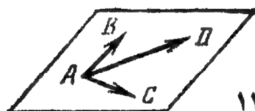
در این حالت $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD_1}/3$ بوده و از اینرو $|MN| = |BD_1|/3$ را خواهیم داشت.
بنابراین جواب مسئله عبارت از $1/3$ خواهد بود.

در دو مثال قبل از یک تساوی برداری که مفهوم مسئله را توضیح می‌دهد به دستگاه معادلات اسکالر هم ارز با آن وصول یافتیم و آن دستگاه را حل کردیم. بایستی تاکید کرد که یک تساوی برداری درست هم ارز با یک مجموعه از معادلات است. حتی اگر یافتن یک مجهول (λ در مثال مورد ملاحظه) مطلوب باشد نباید جستجوی خود را فقط به آن یک مجهول محدود کنیم. باید وجود جواب برای دستگاه حاصله را بررسی کنیم. ممکن است برای مجهول مزبور مقداری یافته شود ولی دستگاه و درنتیجه خود مسئله فاقد جواب باشد.

3° ● در مورد نقاط تمایز A ، B ، C و D که روی یک خط مستقیم قرار دارند لازم و کافی است که

بردارهای $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AB}$ همصفحه باشند. یعنی بایستی اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند بطوریکه: $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

برهان این قضیه از تعریف همصفحه بودن بردارها و از ناشی شدن بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (و درنتیجه بردارهای $\beta\overrightarrow{AC}$ و $\alpha\overrightarrow{AB}$) از نقطه A استنتاج می‌شود (شکل ۱۳۲).



شکل ۱۳۲

مثال ۳ ● از انتهای سه یال یک متوازی السطوح که از یک رأس مشترک ناشی می‌شوند صفحه ای را عبور می‌دهیم. این صفحه قطر متوازی السطوح را که از همان رأس ناشی می‌شود به چه نسبتی قطع می‌کند؟

حل ● رأس مفروض در مسئله را با A نشان داده و رئوس دیگر متوازی السطوح را همچون شکل نامگذاری می‌کنیم (شکل ۱۳۳). M را نقطه ای روی خط AC_1 در نظر می‌گیریم. برای اینکه نقاط A_1، B، D و M روی یک صفحه قرار بگیرند لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{A_1B}$، $\overrightarrow{A_1D}$ و $\overrightarrow{A_1M}$ همصفحه باشند، یعنی بایستی اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند بطوریکه: $\overrightarrow{A_1M} = \alpha\overrightarrow{A_1B} + \beta\overrightarrow{A_1D}$ (4)

عبارات $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$ را در نظر گرفته و بردارهای (4) را برحسب این سه بردار تجزیه می‌کنیم. چنین داریم: $\overrightarrow{A_1B} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$ ، $\overrightarrow{A_1D} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$

همچنین $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM}$ را داریم. در اینجا $\overrightarrow{A_1A} = -\mathbf{c}$ بوده و بردار $\overrightarrow{AM}$ با بردار $\overrightarrow{AC_1}$ همخط است، یعنی: $\overrightarrow{AM} = x\cdot\overrightarrow{AC_1} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

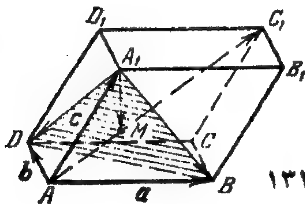
این امر به معنی $\overrightarrow{A_1M} = x\mathbf{a} + x\mathbf{b} + (x-1)\mathbf{c}$ است. با جاگذاری تجزیه برداری حاصله در (4) به تساوی $x\mathbf{a} + x\mathbf{b} + (x-1)\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} - (\alpha+\beta)\mathbf{c}$ دست می‌یابیم که از آن نیز دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ x = \beta, \\ x - 1 = -\alpha - \beta \end{cases}$$

با حل این دستگاه $x = 1/3$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/3$ بدست می‌آید. بدین ترتیب $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC_1}/3$ را داریم؛ یعنی صفحه BDA_1 یک سوم قطر AC_1 را از طرف رأس A قطع می‌کند. از اینرو نتیجه می‌شود که

$$|AM|/|MC_1| = 1/2$$

بوده و جواب مسئله عبارت از $1/2$ خواهد بود.



شکل ۱۳۳

معادله (4) همچنین موجب $\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D})$ شده و این امر حکایت از آن دارد که M، نقطه تلاقی میانه های مثلث BA_1D است. به عبارت دیگر قطر AC_1 مثلث BA_1D را در نقطه تلاقی میانه های آن قطع می‌کند.

$4°$ ● a و b را خطوط مستقیم متمایزی درنظر بگیرید. با شرط $A_1 \neq A_2$، A_1 و A_2 نقاطی از خط a هستند. با شرط $B_1 \neq B_2$ نیز B_1 و B_2 نقاطی از خط b محسوب می‌شوند. برای متقاطع بودن خطوط a و b لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{B_1B_2}$ همصفحه باشند؛ یعنی بایستی اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند بطوریکه: $\overrightarrow{A_1B_1}=\alpha\overrightarrow{A_1A_2}+\beta\overrightarrow{B_1B_2}$

اثبات ● **ضرورت:** اگر خطوط a و b متقاطع باشند آنگاه نقاط A_1، A_2، B_1 و B_2 روی یک صفحه واقع بوده و درنتیجه بردارهای $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{A_1A_2}$ و $\overrightarrow{B_1B_2}$ همصفحه خواهند بود.

کفایت ● تساوی $\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{B_1B_2}$ را در نظر بگیرید. بردار $\overrightarrow{A_1M} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2}$ را از طرف نقطه A_1 جدا می‌کنیم. نقطه M سر این بردار به خط a تعلق دارد. حال بردار $\overrightarrow{B_1N} = -\beta\overrightarrow{B_1B_2}$ را از طرف نقطه B_1 جدا می‌کنیم. نقطه N سر این بردار به خط b متعلق است.

از تساوی برداری $\overrightarrow{MN}= \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1N}$ با بیان طرف راست آن برحسب بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$ و $\overrightarrow{B_1B_2}$ چنین حاصل می‌شود: $\overrightarrow{MN} = -\alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{B_1B_2} - \beta\overrightarrow{B_1B_2} = 0$

از تعریف بردار صفر نتیجه می‌شود که نقاط M و N بر هم منطبق هستند؛ یعنی خطوط a و b متقاطع می‌باشند.

مثال ٤ ● **نقاط** M و N میانگاه یال هایی از یک چهاروجهی (شکل ۱۳٤) بوده و نقاط P و Q روی یال های AD و BC طوری قرار گرفته اند که پاره‌خط های MN و PQ متقاطع بوده و داریم:

$|AP|/|AD| = 2/3$

نسبت $|BQ|/|BC|$ را پیدا کنید.

حل ● برای متقاطع بودن خطوط MN و PQ لازم و کافی است که اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند بطوریکه: $(5)\ \overrightarrow{MP} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{PQ}$

بردارهای $\overrightarrow{MN}$، $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{MP}$ را برحسب بردارهای $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$، $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{AD}=\mathbf{c}$ تجزیه می‌کنیم.

چنین داریم: $\overrightarrow{MN} =\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$.

بدلیل $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}$، $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ نیز چنین استنتاج می‌شود: $\overrightarrow{MN}= -\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$. با منظور کردن عبارت $x=|BQ|/|BC|$ به تساوی زیر وصول می‌یابیم: $\overrightarrow{BQ} = x\overrightarrow{BC} = x(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. با در نظر گرفتن $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$ و $\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} = -\frac{2}{3}\mathbf{c}$ نیز به رابطهٔ $\overrightarrow{PQ}=(1-x)\mathbf{a}+x\mathbf{b}-\frac{2}{3}\mathbf{c}$ و سرانجام به

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$ دست می‌یابیم. با جاگذاری تجزیه‌های برداری حاصله در (5) چنین حاصل می‌شود:

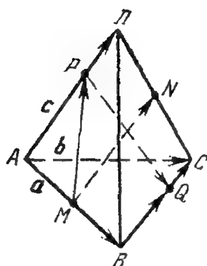
$$-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{c} = \left(\beta(1-x) - \frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{a} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta x\right)\mathbf{b} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\beta\right)\mathbf{c}$$

از این تساوی دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\left|\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \beta(1-x) - \frac{\alpha}{2} \\ 0 &= \frac{\alpha}{2} + \beta x, \\ \frac{2}{3} &= \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\beta. \end{aligned}\right.$$

این دستگاه موجبات $\beta = -1/2,\ x = 2/3,\ \alpha = 2/3$ را فراهم می‌سازد. درنتیجه رابطه زیر را خواهیم داشت: $|BQ|/|BC| = 2/3$. یعنی جواب مسئله عبارت از $2/3$ خواهد بود.

به همان طریقی که در مثال‌های فوق انجام دادیم شرایط توازی یک خط و یک صفحه، دو صفحه و غیره را می‌توانیم به شکل تساوی‌های برداری بیان کنیم.



شکل ۱۳۴

بخش ۱۰ • زاویه بین خطوط مستقیم در فضا

در هندسه فضایی برای تعریف هر دو خط مستقیم از مفهوم زاویه بین آنها استفاده می‌شود. زاویه بین دو خط متقاطع عبارت از اندازه و کوچکترین زاویه تشکیل شده با آن دو خط است. اگر همهٔ چهار زاویه تشکیل شده با دو خط متقاطع برابر باشند آنگاه زاویه بین آنها برابر $90°$ (یا $\pi/2$ رادیان) خواهد بود. اگر دو خط مستقیم موازی باشند آنگاه زاویه بین آنها برابر $0°$ در نظر گرفته می‌شود. زاویه بین دو خط متنافر عبارت از زاویه بین دو متقاطع است که متناظراً به موازات آنها رسم شده‌اند. در این تعریف نقطه تقاطع دو خط که به موازات دو خط متنافر رسم می‌شوند بطور دلخواه اختیار می‌شوند.

قضیه • اگر خطوط متقاطع a و b بترتیب موازی خطوط متقاطع a_1 و b_1 باشند آنگاه زاویه بین خطوط a و b برابر زاویه بین خطوط a_1 و b_1 خواهد بود.

برهان • برای اثبات قضیه روی هر زوج از خطوط موازی نیم‌خط های متشابه‌الجهت اختیار کرده و از این نکته استفاده می‌کنیم که زوایای محدب با اضلاع متشابه‌الجهت مساوی هستند (شکل ۱۳۵): $[OM) \uparrow\uparrow [O_1M_1)$، $[OP) \uparrow\uparrow [O_1P_1]$. درنتیجه $\angle POM \cong \angle P_1O_1M_1$ و غیره را خواهیم

حل ● عبارات $\overrightarrow{BD} = \mathbf{c}$ و $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{BA} = \mathbf{b}$ را در نظر گرفته، چنین داریم:

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = a,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = a^2/2$$

$\overrightarrow{MN}$ را برحسب $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بیان می‌کنیم.

بدلیل $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ و $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}$ ، $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ نتیجه می‌شود که: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})$

(1) چنین حاصل می‌شود:

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = \frac{a^2}{2}$$

از اینرو $|MN| = a/\sqrt{2}$ را داریم.

(2) عبارت $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = \frac{a^2}{2}$ را محاسبه کرده و با منظور کردن:

$$|\overrightarrow{MN}| = a/\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{BC}| = a$$

چنین حاصل می‌شود:

$$\cos(\widehat{MN, BC}) = \frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

این امر به معنی $(\widehat{MN,\ BC}) = \pi/4$ است.

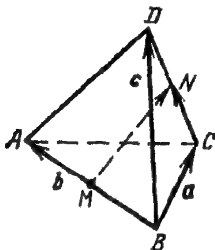
(3) بترتیب چنین حاصل می‌شود:

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{a^2}{2}\right) = 0,$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})\cdot(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}((\mathbf{c} + \mathbf{a})\cdot(\mathbf{c} - \mathbf{a}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{a}))$$

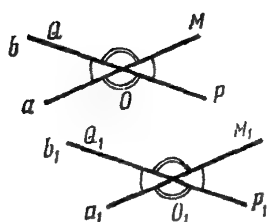
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\left(a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = 0.$$

از اینرو نتیجه می‌شود که $(MN) \perp (AB),\ (NN) \perp (CD)$ است.



شکل ۱۳۹

مثال ۲ ● در چهاروجهی $ABCD$ تساوی‌های $|BC| = |AB|$ و $|DC| = |AD|$ را داریم. ثابت کنید یال‌های AC و BD متعامدند.

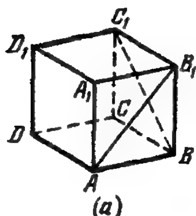


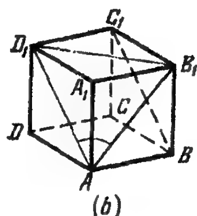
شکل ۱۳۵

داشت. از تعریف زاویه بین خطوط مستقیم و از قضیه بالا نتیجه می‌شود که:
اگر خطوط a و b بترتیب با خطوط a_1 و b_1 موازی باشند آنگاه زاویه بین‌خطوط a و b برابر زاویه بین خطوط a_1 و b_1 خواهد بود.

مثال ۱ • زاویه بین خطوط مستقیمی را پیدا کنید که محتوی اقطار AB_1 و BC_1 از وجوه یک مکعب هستند (شکل a۱۳۶).

حل • اقطار مفروض روی خطوط متنافر قرار دارند. قطر AD_1 از وجه ADD_1A_1 موازی قطر BC_1 بوده و از اینرو زاویه بین خطوط AD_1 و AB_1 با زاویه بین خطوط BC_1 و AB_1 برابر است. مثلث AB_1D_1 را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. هر ضلع آن قطری از وجه مکعب است. طول اقطار برابر بوده و از اینرو مثلث AB_1D_1 متساوی‌الاضلاع می‌باشد. پس $\angle B_1AD_1 = 60°$ است.
زاویه بین نیم‌خط های AB_1 و AD_1 بدست آمده و معلوم شده است که حاده است. بنابراین زاویه بین خطوط AD_1 و AB_1 نیز دارای همان مقدار بوده و جواب مسئله عبارت از $60°$ خواهد بود.





شکل ۱۳۶

مثال ۲ • در منشور مثلثی منتظم (شکل ۱۳۷) $|AA_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}|AB|$ را داریم. زاویه بین خطوط AB_1 و BC_1 را بدست آورید.

حل • قطر AB_1 و $\overrightarrow{B_1C_1}$ را بصورت موازی جابجا کرده و تصویر A را با A_2 نشان می‌دهیم (۱۳۷b).
زاویه بین خطوط AB_1 و BC_1 برابر زاویه بین خطوط BC_1 و C_1A_2 است. چنین داریم:

$$|AA_2| = |B_1C_1| = |BC| \quad ، \quad [AA_2] \parallel [B_1C_1] \parallel [BC]$$

درنتیجه چهار ضلعی $ABCA_2$ یک متوازی‌الاضلاع و بدلیل $|AB| = |BC|$ یک لوزی خواهد بود. نقطه O مرکز لوزی بوده و درنتیجه BO ارتفاع مثلث ABC خواهد بود. با در نظر گرفتن عبارت $|AB| = a$ تساوی های $|BO| = a\sqrt{3}/2$ و $|BA_2| = a\sqrt{3}$ را داریم.
با منظور کردن $|BB_1| = a/\sqrt{5}$ درمی‌یابیم که در مثلث های BB_1A و BB_1C_1 ،

$|AB_1| = |BC_1| = \sqrt{6/5}\,a$ است. پاره‌خط A_2C_1 تصویر پاره‌خط AB_1 در جابجایی موازی بوده و از اینرو $|A_2C_1| = |AB_1| = \sqrt{6/5}\,a$ است. حال با استفاده از قانون کسینوسها در مثلث BC_1A_2 به رابطهٔ زیر دست می‌یابیم:

$$\cos BC_1A_2 = \frac{|BC_1|^2 + |C_1A_2|^2 - |BA_2|^2}{2\,|BC_1|\,|C_1A_2|} = -\frac{1}{4}$$

از این رابطه $\angle BC_1A_2 = \arccos(-1/4)$ بدست می‌آید. زاویه بین نیم‌خط های C_1B و C_1A_2 بصورت منفرجه $(\pi/2 < \arccos(-1/4) < \pi)$ درآمده و بنابراین زاویه بین خطوط C_1B و C_1A_2 مکمل زاویه مزبور خواهد بود:

$$(\widehat{C_1B,\ C_1A_2}) = \pi - \arccos(-1/4)$$

با استفاده از اتحاد $\arccos x + \arccos(-x) = \pi, (|x| \leqslant 1)$ به رابطه‌زیر وصول می‌یابیم:

$$(\widehat{C_1B,\ C_1A_2}) = \arccos(1/4)$$

و درنتیجه جواب مسئله عبارت از $\arccos(1/4)$ خواهد بود.

شکل ۱۳۷

(a) (b)

در دو مثال قبل جستجوی زاویه بین خطوط به یافتن زاویه بین نیم‌خط هایی با رأس های مشترک و موازی خطوط مفروض تحویل یافت. اگر α زاویه بین خطوط مستقیم باشد آنگاه زاویه بین نیم‌خط ها مساوی α یا $\pi - \alpha$ خواهد بود. این نکته را مخصوصاً در مسائلی که در آنها یافتن پارامترهای دیگری از چند وجهی براساس زاویه بین خطوط مطرح است بایستی مورد ملاحظه قرار داد.

مثال ۳ ● در منشور مثلثی منتظم (شکل $۱۳۷a$) زاویه بین خطوط AB_1 و BC_1 برابر $\arccos(1/4)$ بوده و طول ضلع قاعده برابر a است. طول یال جانبی منشور را بدست آورید.

حل ● طول یال جانبی را با b نشان می‌دهیم. همان ترسیمات بکار رفته در حل مثال ۲ را تکرار کرده و دو حالت زیر را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم:

(1) $\angle BC_1A_2 = \arccos(1/4)$ (شکل ۱۳۸)؛

(2) $\angle BC_1A_2 = \pi - \arccos(1/4)$ (شکل $۱۳۷b$).

چنین داریم:

$|BA_2| = a\sqrt{3}$ ،$|C_1A_2| = |AB_1| = |BC_1| = \sqrt{a^2+b^2}$. با استفاده از قانون کسینوسها

در مثلث BC_1A_2 در حالت اول $3a^2 = 2 \times (a^2 + b^2)\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ را و بطریق مشابه در حالت دوم $3a^2 = 2(a^2 + b^2)\left(1 + \frac{1}{4}\right)$ را داریم. از اینجا درمی‌یابیم که بترتیب $b_1 = a$ و $b_2 = a/\sqrt{5}$ است. بدین ترتیب مسئله دارای دو جواب خواهد بود. حالت دوم مسئله به اطلاعات مثال ۲ متناظر است. بنابراین جواب مسئله عبارت از a یا $a/\sqrt{5}$ است.

شکل ۱۳۸

بخش ۱۱ • استفاده از حاصلضرب اسکالر (درونی) بردارها در حل مسائل

حاصلضرب اسکالر درونی بردارها را می‌توان برای یافتن زوایای بین خطوط مستقیم، طول پاره‌خط ها، فاصله بین یک نقطه و یک خط، وغیره مورد استفاده قرار دارد.

فرمول $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ که حاصلضرب اسکالر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را تعریف می‌کند تساوی $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$ را موجب می‌شود. این فرمول را برای یافتن زاویه بین خطوط مستقیم بکار می‌گیریم. A_1 و A_2 را نقاطی از خط a با شرط $A_1 \neq A_2$ و نقاط B_1 و B_2 را نقاطی از خط b با شرط $B_1 \neq B_2$ در نظر می‌گیریم. اندازه φ، زاویه بین بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$ و $\overrightarrow{B_1B_2}$ بین 0 و π قرار داشته و طبق فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{B_1B_2}}{|\overrightarrow{A_1A_2}|\cdot|\overrightarrow{B_1B_2}|}$$

اندازه α، زاویه بین خطوط a و b بین 0 و $\pi/2$ قرار دارد. اگر $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ باشد آنگاه $\alpha = \varphi$ و $\cos\alpha = \cos\varphi = |\cos\varphi|$ خواهد بود.

حال اگر $\pi/2 < \varphi \leqslant \pi$ باشد آنگاه $\alpha = \pi - \varphi$ و $\cos\alpha = -\cos\varphi = |\cos\varphi|$ خواهد بود. از اینرو داریم: $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{B_1B_2}|}{|A_1A_2|\cdot|B_1B_2|}$. از این فرمول نتیجه می‌شود که:

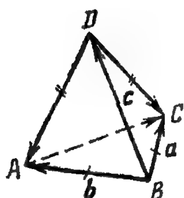
برای تعامد دو خط a و b لازم و کافی است که $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{B_1B_2} = 0$ باشد.

مثال ۱ • در یک چهاروجهی منتظم نقاط M و N میانگاه های یال های AB و CD (شکل ۱۳۹) بوده و $|AB| = a$ است. مطلوبست محاسبهٔ:

(1) طول پاره‌خط MN؛ (2) زاویه بین خطوط MN و BC؛ (3) ثابت کنید خط MN بر یال های AB و CD عمود است.

حل ● سه بردار ناصفحه $\overrightarrow{BA} = \mathbf{b}$، $\overrightarrow{BD} = \mathbf{c}$ ، $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ را اختیار می‌کنیم (شکل ۱۴۰).
چنین داریم: $\overrightarrow{DC} = \mathbf{a} - \mathbf{c}, \overrightarrow{DA} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$.
طبق فرض $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$ و $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ را داریم. از اینرو نتیجه می‌شود که:
$(\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2$، $\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}^2 = \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}^2$

با منظور کردن $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$ به $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ یعنی
$(\mathbf{a} - \mathbf{b})\,\mathbf{c} = 0$ وصول می‌یابیم.
بدلیل $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}, \mathbf{c} = \overrightarrow{BD}$ تساوی
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ را داریم یعنی $(AC)\perp(BD)$
است.



شکل ۱۴۰

قضیه فرعی ● در یک هرم مثلثی منتظم، بویژه در یک چهاروجهی منتظم یال های متقابل بر هم عمود هستند.

در مثال ۱ ثابت کردیم که خط مستقیم مارّ بر میانگاه های یال های متناظر یک چهاروجهی منتظم بر آن یال ها عمود است.

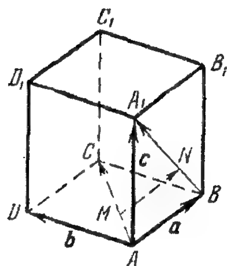
حکم زیر نیز درست است:

برای هر دو خط متنافر یک خط مستقیمی وجود دارد که هردوی آنها را قطع کرده و بر آنها عمود است. این خط منحصر بفرد می‌باشد. پاره‌خطی که دو انتهای آن بر روی دو خط متنافر قرار داشته و بر آنها عمود است عمود مشترک آنها نامیده می‌شود. در بین همهٔ پاره‌خط هایی که دو انتهای آنها بر روی دو خط متنافر قرار دارند عمود مشترک دارای کوتاهترین طول است. بنابراین فاصله بین خطوط متنافر با طول عمود مشترک آنها برابر خواهد بود.

مثال ۳ ● طول یال یک مکعب برابر a است. فاصله بین خطوط مستقیمی را پیدا کنید که شامل اقطار متناظر از دو وجوه مجاور مکعب هستند.

حل ● به عنوان مثال اقطار AC و A_1B از وجوه مکعب را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم (شکل ۱۴۱). M را نقطه‌ای بر روی خط AC و N را نقطه‌ای بر روی خط A_1B در نظر می‌گیریم. شرط تعامد پاره‌خط MN بر خطوط AC و A_1B با روابط زیر هم ارز است:

$$(1)\quad \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC} = 0, \quad \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BA_1} = 0$$



شکل ۱۴۱

بردارهای $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BA_1}$ و $\overrightarrow{MN}$ را برحسب $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ، $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ و $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$ بیان می‌کنیم.
چنین داریم: $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ و $\overrightarrow{BA_1} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$. همچنین بدلیل اینکه نقطه M روی خط AC و نقطه N روی خط A_1B قرار دارد از اینرو $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BA_1}$ استنتاج می‌شود.
با منظور کردن این نکته درمی‌یابیم که:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -x\overrightarrow{AC} + \mathbf{a} + y\overrightarrow{BA_1} = (1-x-y)\,\mathbf{a} - x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$$

تجزیه های برداری را در معادلات (1) جایگذاری می‌کنیم و معادلات را تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ((1-x-y)\,\mathbf{a} - x\mathbf{b} + y\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 0, \\ ((1-x-y)\,\mathbf{a} - x\mathbf{b} + y\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-x-y)\,a^2 - xa^2 = 0, \\ ya^2 - (1-x-y)\,a^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-2x-y = 0 \\ -1+x+2y = 0 \end{cases}$$

از اینرو $x = y = 1/3$ بدست می‌آید. این امر بدین معنی است که نقاط M و N روی پاره‌خط های AC و BA_1 قرار دارند و $|AM| = |AC|/3$ ، $|BN| = |BA_1|/3$ است.
حال چنین داریم: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$. بنابراین تساوی زیر استنتاج می‌شود:

$$|MN| = \sqrt{\frac{1}{9}(a^2 + a^2 + a^2)} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

مسائل

۵۶۳ ● ثابت کنید: (a) دریک چهاروجهی هررأس را به نقطه تلاقی میانه های وجه مقابل وصل می‌کنیم. این خطوط درنقطه ای (آنرا O می‌نامیم) همدیگر را قطع می‌کنند و این نقطه از طرف رأس هریک از آنها را به نسبت 3/1 تقسیم می‌کند.
(b) پاره‌خط هایی که میانگاه های یال های متناظر یک چهاروجهی را بهم وصل می‌کنند در همان نقطه O که میانگاه آنهاست همدیگر را قطع می‌کنند.

۵۶۴ ● طول هریک از یال های چهاروجهی $ABCD$ برابر a است. نقاط M ، N و P بترتیب روی یال های DA ، DC و BC طوری قرار دارند که $|DM| = |CN| = a/3$ و $|CP| = a/5$ است.
برشی از چهاروجهی را رسم کنید که بوسیله صفحه MNP ایجاد می‌شود.
با درنظر گرفتن $Q = (MNP) \cap (AB)$ طول پاره‌خط BQ را محاسبه کنید.

۵۶۵ ● متوازی الاضلاع $ABCD$ نقش قاعده هرم $SABCD$ را ایفاء می‌کند. برشی از هرم را رسم کنید که از رأس A و از نقاط M و P ، میانگاه های یال های SB و SD عبور می‌کند. این برش یال SC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.

۵۶۶ ● طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقاط M و Q را بترتیب روی یال های AD و B_1C_1 ونقاط P و N را روی یال CD طوری اختیار می‌کنیم که $|AM|=|C_1Q|=|CP|=|DN|=a/3$ باشد. برشی از مکعب را رسم کنید که با رسم صفحه ای از خط MP به موازات خط NQ بدست می‌آید. مساحت این برش را محاسبه کنید.

۵۶۷ ● طول یال‌های AC و BD از چهاروجهی $ABCD$ بترتیب برابر a، b وزاویه بین خطوط AC و BD برابر φ است. بیشترین مساحت ممکنه برای برشی از چهاروجهی را پیدا کنید که توسط صفحه ای به موازات خطوط AC و BD ایجاد می‌شود.

۵۶۸ ● خط a و صفحه γ مفروض اند. نقاط A_1 و A_2 روی خط a $(A_1 \neq A_2)$ قرار دارند. نقاط M، N و P که روی این خط واقع نیستند به صفحه γ تعلق دارند. ثابت کنید برای اینکه خط a و صفحه γ موازی باشند لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MP}$ همصفحه باشند، یعنی بایستی اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند که: $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$

۵۶۹ ● نقاط M، N و P بترتیب میانگاه یال های AB، CD و BC از چهاروجهی $ABCD$ هستند. صفحه ای از نقطه P به موازات خطوط DM و AN رسم می‌کنیم. این صفحه یال AD را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

۵۷۰ ● در متوازی السطوح قائم الزاویه $ABCDA_1B_1C_1D_1$ عمودهای A_1P و BQ را از رئوس A_1 و B به قطر AC_1 وارد می‌کنیم. اگر $|AB| = a$، $|AD| = b$ و $|AA_1| = c$ باشد طول پاره‌خط PQ را محاسبه کنید.

۵۷۱ ● طول هر یک از یال های منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ برابر a است. نقاط M و N را بترتیب روی اقطار AB_1 و BC_1 از وجوه منشور طوری اختیار می‌کنیم که $|MN| = \frac{a}{\sqrt{3}}$، $(MN) \perp (AB)$ باشد. نقاط M و N به چه نسبتی پاره‌خط های AB_1 و BC_1 را تقسیم می‌کنند؟

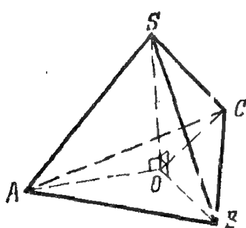
بخش ۱۲ ● خطوط وصفحات متعامد

یک خط مستقیم و یک صفحه درصورتی متعامد خوانده می‌شوند که خط مزبور بر هر خطی از صفحه عمود باشد. بیان فوق تعریف تعامد یک خط و یک صفحه محسوب می‌شود.

مثال ۱ ● قاعده هرمی عبارت از مثلث متساوی الاضلاع ABC (شکل ۱۴۲) بوده وطول یال های جانبی SA، SB و SC از آن با هم برابرند. ثابت کنید که هرم $SABC$ منتظم است.

حل ● اگر پاره‌خط SO را ارتفاع هرم درنظر بگیریم آنگاه طبق تعریف تعامد یک خط و یک صفحه مثلث های SOA، SOB و SOC قائم الزاویه خواهند بود. عبارات $|SA|=|SB|=|SC|=l$ و $|SO|=h$ را درنظر می‌گیریم.

از مثلث های قائم الزاویه SOA ، SOB و SOC درمی یابیم که $|BO| = |CO| = \sqrt{l^2 - h^2}$ است.



شکل ۱۴۲

این امر بدین معنی است که نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ABC بوده و بنابراین مرکز همان مثلث نیز هست.

بدین ترتیب رأس S هرم مفروض را می‌توان روی مرکز قاعده مثلث متساوی الاضلاع ABC تصویر کرد از اینرو هرم مفروض منتظم می‌باشد.

بطریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد هرمی که قاعدهٔ آن چند ضلعی منتظم بوده وطول یال های آن نیز برابر است یک هرم منتظم می‌باشد. بویژه چهار وجهی منتظم یعنی چهار وجهی ای که یال های آن برابر است یک هرم منتظم محسوب می‌شود. هریک از وجوه چهار وجهی منتظم نقش قاعده را برای آن ایفاء می‌کنند.

ضابطهٔ تعامد یک خط ویک صفحه به شرح زیر است:

اگر خط مستقیمی بر هریک از دوخط متقاطع واقع بریک صفحه عمود باشد آنگاه خط وصفحه مفروض متعامد خوانده می‌شوند.

مثال ۲ ● ثابت کنید قطر AC از قاعدهٔ منشور چهارگوش منتظم (شکل ۱۴۳) بر صفحه BB_1D_1D عمود است.

اثبات ● کافی است که ثابت کنیم خط AC بر هر دو خط متقاطع واقع بر صفحه BB_1D_1D عمود است.

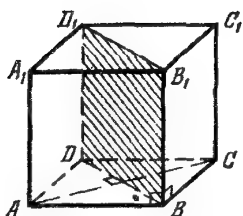
از مربع بودن $ABCD$ نتیجه می‌شود که $(AC) \perp (BD)$ است.

ثابت خواهیم کرد که $(AC) \perp (BB_1)$ است.

منشور مفروض منتظم است وبنابرآن $(BB_1) \perp (ABCD)$ خواهد بود. طبق تعریف تعامد یک خط بریک صفحه این امر موجب $(BB_1) \perp (AC)$ می‌شود.

بدین ترتیب درمی یابیم که خط AC بر خطوط متقاطع BD و BB_1 از صفحه BB_1D_1D عمود است.

طبق ضابطه تعامد یک خط بریک صفحه این امر بر $(AC) \perp (BB_1D_1D)$ دلالت می‌کند.



شکل ۱۴۳

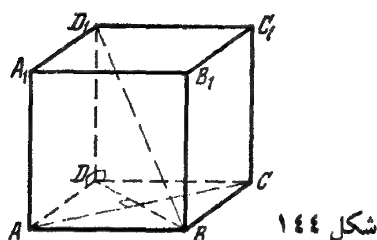
قضیه ● برای اینکه خط مستقیم واقع بریک صفحه بریک خط شیب دارعمود باشد لازم و کافی است که خط مفروض برتصویرخط شیب دارروی صفحه مزبورعمود باشد.

قضیه: اگرخطی دریک صفحه برتصویریک خط شیب دارروی آن صفحه عمود باشد آنگاه خط مزبور برخود خط شیبدارعمود خواهد بود.

مثال ۳ ● ثابت کنید قطر BD_1 از مکعب شکل ۱۴۴ برقطر AC ازوجه $ABCD$ عمود است.

اثبات ● خط BD تصویرخط شیب دار BD_1 روی صفحه $ABCD$ است زیرا $(D_1D) \perp (ABCD)$ می‌باشد. وجه $ABCD$ یک مربع بوده و این امربه معنی $(AC) \perp (BD)$ است.

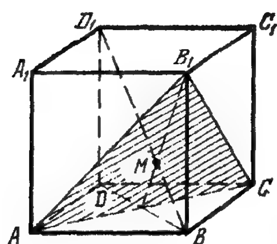
براساس شرط کفایت قضیه بالا رابطه اخیر موجب $(AC) \perp (BD_1)$ می‌شود.



شکل ۱۴۴

قضیه فرعی ● قطریک مکعب که ازیک رأس آن ناشی می‌شود برصفحه ماراز انتهای سه یال ناشی از همان رأس عمود است.

اثبات ● برای اثبات مثلاً قطر BD_1 را درنظرمی‌گیریم (شکل ۱۴۵).
ثابت کرده‌ایم که $(BD_1) \perp (AC)$ است.
بطریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $(BD_1) \perp (AB_1)$ است.
ازاینرونتیجه می‌شود که $(BD) \quad (AB_1C)$ است. ازویژگی های تقارن مکعب روشن می‌شودکه این امر درمورد هریک از اقطار مکعب صادق است.



شکل ۱۴۵

قضیه ● اگرخط مستقیم واقع بریک صفحه بریک خط شیبدار (مورب) عمود باشد آنگاه آن خط بر تصویرخط شیبدار بر روی صفحه نیزعمود خواهد بود.

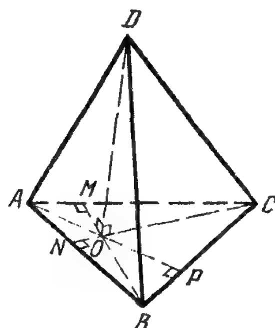
مثال ٤ ● درچهاروجهی $ABCD$ یال AB بریال CD ویال AC بریال BD عمود است. ثابت کنید که پای ارتفاع DO ازچهاروجهی نقطه تلاقی ارتفاعات (یا امتداد ارتفاعات) مثلث ABC است.

اثبات ● ابتدا حالتی را مورد ملاحظه قرارمی‌دهیم که درآن هیچیک ازیال های BD و CD به صفحه ABC عمودنیستند، یعنی حالتی را درنظرمی‌گیریم که هریک از این یال ها روی خط مورب(شیبدار)نسبت به صفحه ABC قراردارند. بدلیل $(DO) \perp (ABC)$ (شکل ۱٤٦) خط BO تصویرخط BD بر صفحه ABC محسوب می‌شود. طبق فرض خط AC که روی صفحه ABC قراردارد برخط مورب BD عمود است. طبق شرط لازم مطروحه درقضایای فوق این امربر $(AC) \perp (BO)$ دلالت دارد.

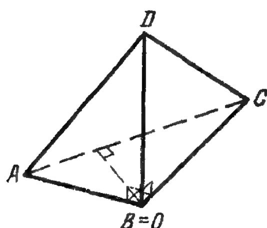
بطریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $(CO) \perp (AB)$ است. بدین ترتیب نقطه O مرکز تلاقی ارتفاعات (یا امتداد ارتفاعات) مثلث ABC خواهد بود. حال حالتی را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که یکی از یال ها مثل BD بر صفحه ABC عمود است (شکل ۱۴۷).

در این حالت نقطه O بر نقطه B منطبق بوده و خط CD نسبت به صفحه ABC مورب می‌باشد و تصویر آن بر روی صفحه عبارت از خط (BC) است.

طبق شرط لازم مطروحه در قضایای فوق رابطه $(AB) \perp (CD)$ موجب $(AB) \perp (BC)$ می‌شود. این امر بدین معنی است که مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه بوده و نقطه B محل تلاقی ارتفاعات آن است.



شکل ۱۴۶



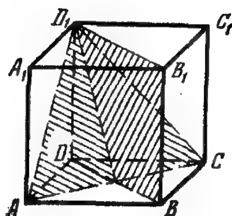
شکل ۱۴۷

حال مسئله ای را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که می‌توان آن را با کمک ضابطه تعامد دوصفحه به شرح زیر به آسانی حل کرد.

اگر صفحه ای از خط عمود بر یک صفحه دیگر بگذرد آنگاه بر صفحه مزبور عمود خواهد بود.

مثال ۵ • ثابت کنید صفحات AD_1C و BB_1D_1D از منشور چهارگوش منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ متعامد هستند.

اثبات • در مثال ۲ ثابت کردیم که $(AC)\perp(BB_1D_1D)$ است (شکل ۱۴۸). طبق ضابطه تعامد صفحات این امر $(AD_1C) \perp (BB_1D_1D)$ را موجب می‌شود.



شکل ۱۴۸

قضیه • اگر دوصفحه متعامد باشند آنگاه خط مستقیم مار بر یکی از آنها که با فصل مشترک دوصفحه زاویه قائمه درست می‌کند بر صفحه دیگر عمود خواهد بود.

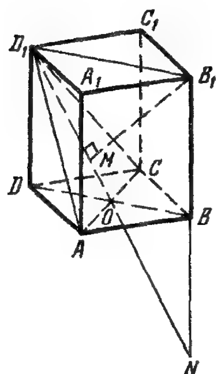
مثال ۶ • در منشور چهارگوش منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ طول عمود مرسوم از رأس B_1 بر صفحه AD_1C با شرط $|AB| = a$ و $|AA_1| = b$ را بیابید.

حل • در مثال ۵ ثابت کردیم که صفحات AD_1C و BB_1D_1D متعامد هستند. فصل مشترک این صفحات

عبارت از خط DO است (شکل ۱۴۹). اگر B_1M را در صفحه BB_1D_1D بر خط DO عمود رسم کنیم آنگاه طبق قضیه اثبات شده در بالا $(AD_1C) \perp (B_1M)$ خواهد بود.

فرض می‌کنیم که $N = (D_1O) \cap (BB_1)$ است.

در مثلث قائم الزاویه NB_1D_1 $(\angle NB_1D_1 = 90°)$ رابطه $|B_1D_1| = a\sqrt{2}$ و درنتیجه $|NB_1| = 2b$ را داریم. درنتیجه چنین استنتاج می‌شود: $|ND_1| = \sqrt{|NB_1|^2 + |B_1D_1|^2} = \sqrt{4b^2 + 2a^2}$



شکل ۱۴۹

پاره‌خط B_1M ارتفاع مثلث NB_1D_1 است. آنگاه از یک طرف در مورد مساحت این مثلث $S = \frac{1}{2}|NB_1|\cdot|B_1D_1|$ و از طرف دیگر $S = \frac{1}{2}|ND_1|\cdot|B_1M|$ را داریم.

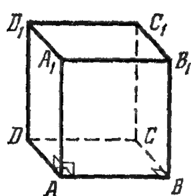
از اینرو $|B_1M|\cdot|ND_1| = |B_1D_1|\cdot|NB_1|$ یعنی رابطه زیر استنتاج می‌شود:

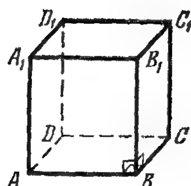
$$|B_1M| = \frac{|B_1D_1|\cdot|NB_1|}{|ND_1|} = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$$

قضیه ● اگر دو صفحه متقاطع α و β بر صفحه γ عمود باشند آنگاه فصل مشترک صفحات α و β نیز بر صفحه γ عمود خواهد بود. اثبات این قضیه را به عهده دانش‌آموزان واگذار می‌کنیم

بخش ۱۳ ● رسم خطوط و صفحات متعامد.
رسم برش های عمود بر یک خط یا یک صفحه

اساس رسم اجسام فضایی در هندسه فضایی بر تصویر کردن موازی روی یک صفحه استوار است. تصویرهای موازی دارای تعدادی ویژگی های ساده هستند. به عنوان مثال در تصویر موازی، توازی خطوط و نسبت طول های پاره‌خط های موازی پابرجا می‌ماند در حالیکه در مورد زاویه ها چنین نیست. شکل ۱۵۰ تصویر موازی مکعبی را نشان می‌دهد. وجه AA_1B_1B با صفحه رسم موازی است و از اینرو تصویر آن مربعی مساوی خود آن وجه خواهد بود. وجه $ABCD$ با صفحه رسم موازی نیست. تصویر آن متوازی الاضلاعی است که با خود وجه برابر نیست. براساس موقعیت زاویه قائمه ABC و جهت تصویر کردن، تصویر آن می‌تواند حاده یا منفرجه باشد.





شکل ۱۵۰

مثال ۱ ● طول ضلع قاعده منشور چهارگوش منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (شکل ۱۵۱) برابر a است. تصویر عمود مرسوم در M، میانگاه یال AA_1 را بر خط BD_1 نشان داده وطول این عمود را بیابید.

حل ● مثلث MBD_1 را مورد ملاحظه قرار میدهیم. عمود مرسوم از نقطه M بر خط BD_1 ارتفاع این مثلث است. با در نظر گرفتن عبارت $b = |AA_1|$ به $|AM| = |MA_1| = b/2$ وصول می یابیم.

در مثلث های قائم الزاویه MAB و MA_1D_1 رابطه $|MB| = |MD_1| = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ حاصل می‌شود. این امر بدین معنی است که مثلث MBD_1 متساوی الساقین بوده و ارتفاع مرسوم از رأس M میانه نیز هست، یعنی پای ارتفاع مزبور میانگاه پاره‌خط BD_1 است. با اتصال نقطه M و N، میانگاه قطر BD_1، ارتفاع مرسوم از نقطه M به خط BD_1 بدست می‌آید.

شکل ۱۵۱

حال با یادآوری

$|BN| = \frac{1}{2}|BD_1|$ و $|BD_1| = \sqrt{2a^2 + b^2}$ از

مثلث قائم الزاویه MNB درمی‌یابیم که:

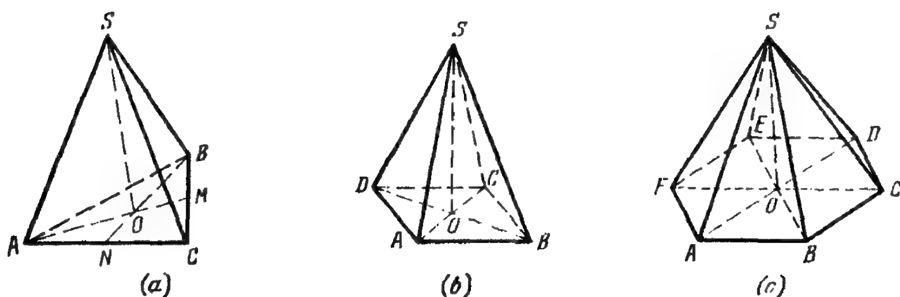
$$|MN| = \sqrt{|MB|^2 - |BN|^2} = a/\sqrt{2}$$

برای رسم عمودی از نقطهٔ معینی بر صفحه معینی در فضا معمول این است که موقعیت پای عمود را نسبت به نقاط صفحه مزبور که در شکل مشخص شده است، تعیین کنیم.

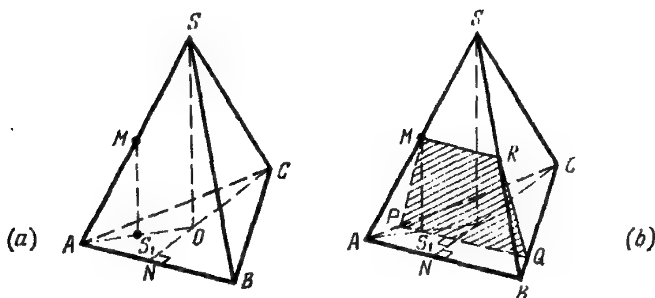
شکل ۱۵۲a را اختیار می‌کنیم که در آن هرم مثلثی منتظم $SABC$ و ارتفاع SO آن نشان داده شده است (مثلث ABC قاعده هرم است). طبق تعریف پای ارتفاع هرم منتظم مرکز قاعده هرم نیز هست. مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABC بر نقطه تلاقی میانه های آن منطبق است. بنابراین میانه های AM و BN را در شکل ۱۵۲a رسم می‌کنیم. نقطه O محل تلاقی آنها پای ارتفاع هرم است. پای ارتفاع هرم چهارگوش منتظم ارائه شده در شکل ۱۵۲b را می‌توان به عنوان نقطه تلاقی اقطار متوازی الاضلاعی بدست آورد که نقش قاعده هرم را بازی می‌کند وعبارت از مربع $ABCD$ است. پای ارتفاع هرم شش وجهی منتظم ارائه شده در شکل ۱۵۲c را نیز می‌توان بطریق مشابه بدست آورد. اشکال ۱۵۳a و ۱۵۳b رسم برشی از هرم مثلث القاعده منتظم $SABC$ را نشان می‌دهد که با عبور صفحه ای از M، میانگاه یال

SA تشکیل می‌شود. این صفحه با ارتفاع CN قاعده هرم زاویه قائمه تشکیل می‌دهد. صفحه قاطع را با α نشان می‌دهیم. بدلیل $\alpha \perp (CN)$ رابطه $\alpha \perp (ABC)$ حاصل می‌شود. از اینرو عمود مرسوم از نقطه M بر صفحه ABC به صفحه α متعلق خواهد بود. عمود مرسوم با ارتفاع هرم که از رأس S رسم می‌شود موازی است. براساس تجزیه و تحلیل انجام گرفته ترسیمات زیر را انجام می‌دهیم: ارتفاع SO هرم و خطوط $[SO] \parallel [MS_1]$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۳a). ضلع برش که بر وجه ABC واقع است بر خط CN عمود بوده و از اینرو موازی یال AB می‌باشد. از نقطه S_1 خطی براساس $[AB] \parallel [PQ]$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۳b). از موازی بودن PQ و AB نتیجه می‌شود که ضلع برش که بر وجه ASB واقع است با یال AB نیز موازی است. خط MR را براساس $[A\hat{B}] \parallel [MR]$ رسم می‌کنیم. برش حاصل عبارت از ذوزنقه $PMRQ$ است.

ذیلاً مثال دیگری را در رسم برشی متعامد بر یک خط مستقیم ارائه می‌کنیم.



شکل ۱۵۲

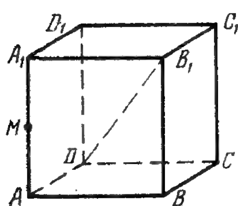


شکل ۱۵۳

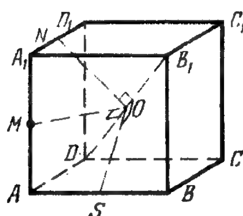
مثال ۲ ● برشی از یک مکعب را رسم کنید که از M، میانگاه یال AA_1 طوری عبور کند که با قطر B_1D مکعب زاویه قائمه بسازد (شکل ۱۵۴a). این برش قطر مکعب را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

حل ● همچون مثال ۱ بالا به آسانی ثابت می‌شود که عمود مرسوم از نقطه M بر خط B_1D از O، میانگاه پاره خط B_1D عبور می‌کند. عمود مرسوم از N، میانگاه یال A_1D_1 بر خط B_1D نیز از نقطه O می‌گذرد

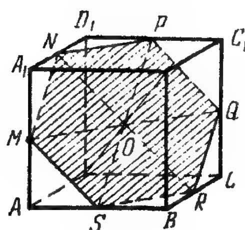
(شکل $154b$). این امر بدین معنی است که صفحه برش مار بر نقاط M، N و O قطر B_1D را نصف می‌کند. حال به رسم برش می‌پردازیم. برای انجام این کار ثابت می‌کنیم که صفحه برش از S، میانگاه یال AB می‌گذرد. خط مستقیم SO همچون خط MO بر خط B_1D عمود است. بدین ترتیب صفحه MOS همچون صفحه MON بر خط B_1D عمود خواهد بود. آنگاه این صفحات بر هم منطبق بوده و $S \in (MON)$ خواهد بود. حال مثال ۱ بخش ۸ را می‌توان مورد استفاده قرار داد. ثابت کردیم که برشی از مکعب که با صفحه MNS بوجود می‌آید یک شش ضلعی منتظم (شکل $154c$) است که رئوس آن میانگاه یال‌هایی از مکعب است که قطر B_1D را قطع نمی‌کنند. جواب مسئله عبارت از ۱:۱ است.



(a)



(b)



(c)

شکل ۱۵۴

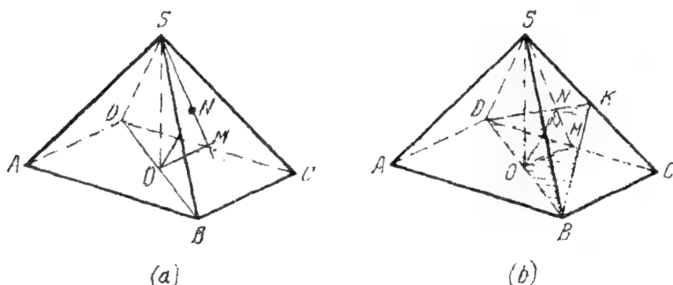
حال مثالی از رسم برش عمود بر یک صفحه معین را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

مثال ۳ ● طول هر یال هرم چهارگوش منتظم $SABCD$ برابر a است. برشی از این هرم را رسم کنید که از قطر BD قاعده طوری عبور کند که با وجه SCD زاویه قائمه درست کند (شکل $155a$). مساحت این برش را محاسبه کنید.

حل ● از نقطه ای از خط BD عمودی بر صفحه CSD رسم می‌کنیم. عمود به صفحه برش متعلق بوده و به همراه خط BD بطور کامل آن را تعریف می‌کند. مناسب بنظر می‌رسد که ترسیم برش را از نقطه O مرکز قاعده $ABCD$ انجام دهیم. در حقیقت صفحه SOM که در آن M میانگاه یال CD است (شکل $155a$) بر صفحه CSD عمود است ($(CD)\perp(SOM)$، $(CD)\subset(CSD)$). بدین ترتیب ارتفاع مثلث SOM که از رأس O رسم می‌شود بر صفحه CSD عمود خواهد بود. حال تعیین می‌کنیم پای N ارتفاع، ضلع SM را با چه نسبتی تقسیم می‌کند.

در مثلث قائم الزاویه SOM ($\angle SOM=90°$) روابط $|OM| = a/2$ و $|SM| = a\sqrt{3}/2$ را داریم. طبق خاصیت مثلث قائم الزاویه تساوی $|OM|^2 = |MN|\cdot|SM|$ در دسترس قرار می‌گیرد که از آن نیز $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ استنتاج می‌شود. این امر به معنی $|MN| = \frac{1}{3}|SM|$ و مرکز بودن نقطه

N برای مثلث متساوی الاضلاع CSD است. میانه DK مثلث CSD را رسم می‌کنیم.
$(SM) \cap (DK) = N$ را داریم. برشی که بدست می‌آید عبارت از مثلث DKB است.
حال مساحت برش را بدست می‌آوریم. ارتفاع h مثلث DKB مرسوم از رأس B دو برابر طول عمود ON است زیرا نقطه O میانگاه پاره‌خط BD است.
در مثلث قائم الزاویه SOM رابطه $|ON| = \sqrt{|MN| \cdot |SN|} = a/\sqrt{6}$ را داریم.
درنتیجه $h = 2a/\sqrt{6}$ بوده و مساحت مثلث DKB عبارت از $|DK| \frac{1}{2} h = a^2/2\sqrt{2}$ خواهد بود.



شکل ۱۵۵

بخش ۱٤ • زاویه بین خط وصفحه

زاویه بین یک خط مورب نسبت به یک صفحه و خود آن صفحه برابر با زاویه بین خط و تصویر قائم آن روی صفحه است.

اگرخطی بر صفحه ای عمود باشد آنگاه زاویه بین آنها برابر 90° خواهد بود؛ اگر خط و صفحه موازی باشند زاویه بین آنها 0° خواهد بود.

مثال ۱ • زاویه بین یال یک چهاروجهی منتظم و صفحهٔ وجهی از آن را پیدا کنید که شامل آن یال نیست.

حل • زاویه بین یال AD و صفحه ABC را بدست می‌آوریم (شکل ۱۵٦). طول یال چهاروجهی را با a نشان می‌دهیم. عمود DO را بر صفحه ABC فرود می‌آوریم. نقطه O مرکز مثلث ABC بوده و از اینرو $|AO| = a\sqrt{3}/3$ را داریم. خط AO تصویر خط AD بر صفحه ABC بوده و ازاینرو زاویه بین خط AD و صفحه مزبور برابر $\angle DAO$ است.

روابط $\cos DAO = |AO|/|AD| = \sqrt{3}/3$ ، $\angle DAO = \arccos(1/\sqrt{3})$ را داریم. به آسانی می‌توان دریافت که هریال چهاروجهی منتظم زاویه‌ای به همین اندازه با هروجهی که شامل یال مزبور نیست درست می‌کند.

بنابراین جواب مسئله عبارت از $\arccos(1/\sqrt{3})$ خواهد بود.

شکل ۱۵۶

مثال ۲ ● در منشور مثلث القاعده منتظم $ABCA_1B_1C_1$ رابطهٔ $|AB| = |AA_1|$ را داریم. زاویه بین قطر AB_1 و صفحه AA_1C_1C را بیابید.

حل ● تصویر خط AB_1 را روی صفحه AA_1C_1C رسم می‌کنیم. صفحات $A_1B_1C_1$ و AA_1C_1C متعامد بوده و بنابرآن عمود B_1M وارد بر خط A_1C_1 بر صفحه AA_1C_1C نیز عمود خواهد بود. خط AM تصویر قائم خط AB_1 روی صفحه AA_1C_1C است. زاویه بین خط AB_1 و صفحه AA_1C_1C برابر $\angle B_1AM$ است. با در نظر گرفتن عبارت $a = |AB|$ رابطه $|AA_1| = a$ و نیز رابطه $|AB_1| = a\sqrt{2}$ را خواهیم داشت. ارتفاع B_1M از مثلث متساوی الاضلاع $A_1B_1C_1$ برابر $a\sqrt{3}/2$ است. در مثلث قائم الزاویه B_1AM چنین داریم:

$$\sin B_1AM = |B_1M|/|AB_1| = \sqrt{6}/4$$

$$\angle B_1AM = \arcsin(\sqrt{6}/4)$$

بنابراین جواب مسئله عبارت از $\arcsin(\sqrt{6}/4)$ خواهد بود.

شکل ۱۵۷

توجه ● اختیار زاویه B_1AA_1 به عنوان زاویه بین خط AB_1 و صفحه AA_1C_1C ناصحیح است (شکل ۱۵۹). خط AA_1 تصویر قائم خط AB_1 روی صفحه AA_1C_1C نیست و زاویه B_1AA_1 که معادل $\frac{\pi}{4}$ است زاویه بین خط و صفحه مزبور محسوب نمی‌شود. روش مختصات را نیز می‌توان برای یافتن زاویه بین صفحه و خط بکار گرفت. دستگاه مختصات کارتزین را در فضا در نظر گرفته فرض کنید که صفحه α با معادله زیر در آن تعریف شده باشد:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

همچنین دو نقطه $A_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ و $A_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ را از خط a در نظر بگیرید. زاویه بین خط a و صفحه α را با φ نشان می‌دهیم. دو بردار زیر را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{n} = (a;\ b;\ c) \quad \text{و} \quad \mathbf{l} = \overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

زاویه φ بوسیله فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{l}|} \qquad (2)$$

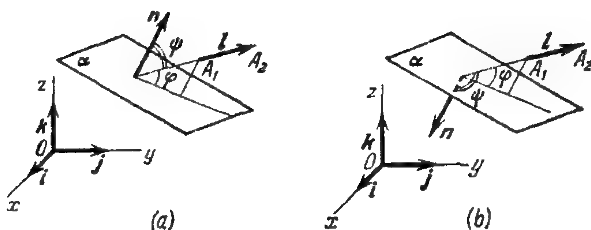
درحقیقت بردار $\mathbf{n} = (a;\ b;\ c)$ که بر صفحه σ عمود است با معادله (1) تعریف شده وبنابراین با درنظر گرفتن تساوی $\psi = \widehat{(\mathbf{n},\ \mathbf{l})}$ چنین خواهیم داشت:

اگر $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ خواهد بود (شکل ۱۵۹a)؛

اگر $\frac{\pi}{2} < \psi \leqslant \pi$ باشد آنگاه $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ خواهد بود (شکل ۱۵۹b).

درهردوحالت $\sin\varphi = |\cos\psi|$ را داریم. این امرورابطه $\cos\psi = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{l}|}$ موجب فرمول (2) می‌شود. درمسائل استنتاج معادلات صفحه غالباً از این نکته استفاده می‌شود که معادله هرصفحه ماربرنقطه $M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ را می‌توان به شکل زیرداشت:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$



شکل ۱۵۸

مثال ۳ ● درمنشورچهارگوش منتظم نسبت طول یال جانبی به ضلع قاعده برابر 2 است. زاویه بین قطر BD_1 منشور وصفحه BC_1D را بیابید (شکل ۱۵۹).

حل ● دستگاه مختصات را همچون شکل ۱۵۹ درنظرمی‌گیریم. اگرضلع قاعده منشوررا با s نشان دهیم طول یال جانبی آن برابر $2s$ خواهد بود. آنگاه مختصات نقاط B، C_1، D و D_1 را بدست می‌آوریم: $B(S;\ S;\ 0)$ و $C_1\ (0;\ S;2s)$ و $D(0;\ 0;\ 0)$ و $D_1\ (0;\ 0;\ 2s)$. صفحه BC_1D ازنقطه $D(0;\ 0;\ 0)$ عبور کرده وبنابراین طبق معادله (3) معادله آن دارای شکل $ax + by + cz = 0$ خواهد بود.

با جاگذاری مختصات نقاط B و C_1 دراین معادله دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} as + bs = 0 \\ bs + 2cs = 0 \end{cases}$$

ازاین دستگاه درمی‌یابیم که $a = 2c,\ b = -2c$ است. این امربدین معنی است که معادله صفحه BC_1D دارای شکل روبرواست: $2cx - 2cy + cz = 0$

با منظور کردن $c \neq 0$ (درغیراین صورت همهٔ جملات صفر خواهد شد) وحذف آن ازمعادله به معادلهٔ روبرووصول می‌یابیم: $2x - 2y + z = 0$

بدین ترتیب بردار $\mathbf{n}$ که برصفحه BC_1D عمود است دارای مختصات $(2;\ -2;\ 1)$ است. مختصات

$(p;\ q;\ r)$ بردار $\mathbf{l} = \overrightarrow{BD_1}$ را بدست می‌آوریم:

$$p = 0 - s = -s \text{،}\ q = 0 - s = -s \text{،}\ r = 2s - 0 = 2s$$

آنگاه محاسبات زیررا انجام می‌دهیم:

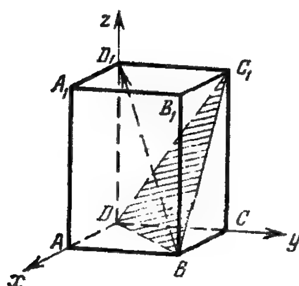
$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = (-s)\cdot 2 + (-s)\cdot(-2) + 2s\cdot 1 = 2s, \quad |\mathbf{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{s^2+s^2+4s^2} = \sqrt{6}\ s$$

با در نظر گرفتن φ به عنوان زاویه بین خط BD_1 وصفحه BC_1D طبق فرمول (2) چنین بدست می‌آید:

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{l}|} = \frac{2s}{3\cdot\sqrt{6}\cdot s} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

بنابراین جواب مسئله عبارت از $\varphi = \arcsin(\sqrt{6}/9)$ خواهد بود.



شکل ۱۵۹

بخش ۱۵ ● فاصلهٔ بین یک نقطه و یک صفحه. فواصل بین خطوط و صفحات

به تعریف فاصله بین اجسام فضایی می‌پردازیم: کوتاهترین فاصله بین نقاط دوجسم فضایی Φ_1 و Φ_2، فاصلهٔ بین دوجسم فضایی Φ_1 و Φ_2 نامیده می‌شود.

اگر نقطه ای روی یک صفحه واقع نباشد در آنصورت فاصله نقطه ازصفحه مزبورعبارت از طول عمودی خواهد بود که از آن نقطه به صفحه مزبور وارد می‌شود. اگر نقطه متعلق به صفحه باشد آنگاه فاصله بین آنها صفر خواهد بود. مثلاً در همین فصل با مسائلی درمورد یافتن فاصله یک نقطه ازیک صفحه مواجه بودیم (مثال ۵ بخش ۱۲). حال برای یافتن آن فاصله روش های دیگری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

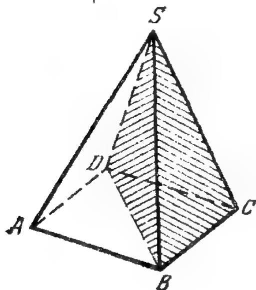
اگر V، حجم هرم و Q، مساحت قاعدهٔ آن معلوم باشد آنگاه H، ارتفاع هرم را می‌توان طبق فرمول زیر محاسبه کرد: $H = 3V/Q$، این ارتفاع چیزدیگری بجز فاصله رأس هرم ازصفحهٔ قاعده آن نیست.

مثال ۱ ● مساحت سطح جانبی و حجم هرم چهارگوش منتظمی بترتیب برابر V و S است. فاصله رأسی ازقاعده را ازوجه جانبی ای حساب کنید که شامل آن رأس نیست.

حل ● یافتن فاصله رأس B ازصفحه SCD مطرح است (شکل ۱۶۰). هرم $SBCD$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این هرم و هرم $SABCD$ در ارتفاع منشعب ازرأس S مشترک بوده و مساحت قاعده هرم اول یعنی مساحت BCD برابر نصف مساحت مربع $ABCD$ است. این امر بدین معنی است که اگر

حجم هرم اول را بـا V_1 نشان دهیـم آنگاه $V_1 = V/2$ خواهد بود. وجه SCD را قـاعـده هـرم $SBCD$ در نظر مـی‌گیریم. مساحت ایـن وجـه برابر $S/4$ است. ارتفاع هـرم $SBCD$ وارده از رأس B بـا فاصله نقطه B از صفحه SCD برابر است. ایـن فاصله را بـا d نشان می‌دهیـم.

آنگاه $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S \cdot d = \frac{1}{12} S \cdot d$ خـواهد بود. بـا بخاطر آوردن $V_1 = \frac{1}{2} V$ درمی‌یابیم کـه $d = 6V/S$ است. بدیهی است که نتیجه حاصله به نـوع انتخاب رأس قاعده و انتخاب صفحه وجه جانبی فاقد آن رأس بستگی ندارد. بنابراین جواب مسئله عبارت از $6V/S$ خواهد بود.



شکل ۱۶۰

برای یافتن فاصله یک نقطه و یک صفحه از روش مختصات یعنی از روش زیر نیز می‌توان استفاده کرد: فاصله (ρ) نـقطـه $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ از یک صفحه که با معادله $ax + by + cz + d = 0$ تعریف شده است ازطـریق فرمول زیر قـابل محاسبه است:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (1)$$

مثال ۲ ● در منشور مـثلث القاعـدهٔ منتظم شکل ۱۶۱، $|AB| = 4\ \text{cm}$ و $|AA_1| = 3\text{cm}$ را داریم. فاصله رأس C_1 را از صفحه ADB پیدا کنید. نقطه D میانگاه یال A_1C_1 است.

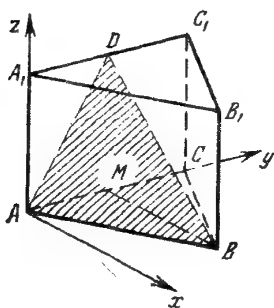
حل ● دستگاه مـختصات کارتزیـنی واقع در شکل ۱۶۱ را در نظر می‌گیریم. محور x های این دستگاه و میانه BM از مثلث ABC در صـفحه قاعده واقع شده و بـر خط AC عمود‌اند. بنابرایـن محور x ها موازی خط BM خواهد بود. توجـه دارید که قسمت هـاشور خورده ADB از صفحـه، برشی از منشور بـه حساب نمی‌آید. مختصات نقاط A، B، D و C_1 را بدست می‌آوریم:

$$A\ (0;\ 0;\ 0),\ B\ (2\sqrt{3};\ 2;\ 0),\ D\ (0;\ 2;\ 3),\ C_1\ (0;\ 4;\ 3)$$

با توجه به مختصات معلوم نقاط A، B و D معادله صفحهٔ ADB همچون مثال ۳ بخش ۱۴ بدست‌می‌آید: $\sqrt{3}x - 3y + 2z = 0$. فاصله (ρ) نقطه $C_1\ (0;\ 4;\ 3)$ ازصفحه مز بور را می‌توان بوسیله فرمول (1) محاسبه کرد:

$$\rho = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{3 + 9 + 4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

بنابراین جواب مسئله عبارت از $3/2$ cm خواهد بود.



شکل ۱۶۱

مسائل مربوط به یافتن فواصل یک خط و یک صفحه موازی با آن و صفحات موازی به مسئله یافتن فاصله یک نقطه از یک صفحه تحویل می‌یابد. این نکته از احکام زیر استنتاج شده است:

فاصله بین یک خط و یک صفحه موازی با آن برابر فاصله نقطه دلخواهی از آن خط نسبت به صفحه مفروض است.

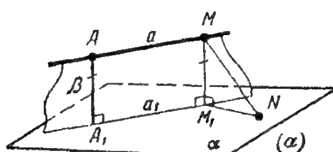
فاصله دو صفحه موازی برابر با فاصله نقطه دلخواهی از یک صفحه نسبت به صفحه دیگر است.

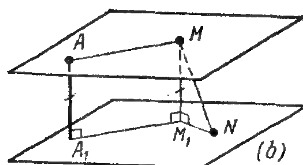
حکم اول را ثابت می‌کنیم (شکل a ۱۶۲). حکم دوم را نیز می‌توان بطریق مشابه اثبات کرد (شکل ۱۶۲b).

اثبات • روابط $a \parallel \alpha$، $a \not\subset \alpha$ (اگر $a \subset \alpha$ باشد آنگاه بدیهی است که فاصله بین آنها صفر خواهد بود) را در نظر می‌گیریم. A را نقطه ای دلخواه از خط a فرض می‌کنیم.

$[AA_1] \perp \alpha$ را داریم (شکل a ۱۶۲). مطلوب قضیه این است که ثابت کنیم فاصله بین a و α برابر $|AA_1|$ است. با رسم صفحه β از خط a و نقطه A_1، $\beta \perp \alpha$ را داریم. اگر $\beta \cap \alpha = a_1$ فرض شود آنگاه $a_1 \parallel a$ خواهد بود. نقاط دلخواه $M \in a$ و $N \in \alpha$ را اختیار کرده و عمود MM_1 را در صفحه β بر خط a_1 رسم می‌کنیم. آنگاه بدیهی است که $|MM_1| = |AA_1|$ خواهد بود.

از این گذشته $[MM_1] \perp \alpha$ (بدلیل $\beta \perp \alpha$) بوده و از اینرو $|MN| \geqslant |MM_1|$ را داریم. از این نکته استنتاج می‌شود که $|MN| \geqslant |AA_1|$ است. بدین ترتیب $|AA_1|$ کوتاهترین خط بین فواصل نقاط خط a و صفحه α خواهد بود. یعنی $|AA_1|$ فاصله این اشکال خواهد بود.





شکل ۱۶۲

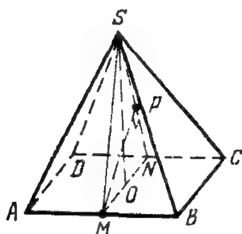
مثال ۳ • طول ارتفاع هرم چهارگوش منتظم $SABCD$ وطول ضلع قاعده آن برابر a است. فاصله بین خط AB و صفحه SCD را محاسبه کنید.

حل • از رأس S هرم و نقاط M و N، میانگاه های یال های AB و CD صفحه ای را عبور می‌دهیم (شکل ۱۶۳). این صفحه بر صفحه SCD عمود خواهد بود. عمود MP بر خط SN نیز بر صفحه SCD عمود است. طول این عمود دقیقاً برابر فاصله خط AB از صفحه SCD است. ارتفاع SO هرم و پاره‌خط MP ارتفاعات مثلث SMN محسوب می‌شوند.

در این مثلث چنین داریم:

$$|MN| = a، \quad |SO| = a، \quad |SN| = \sqrt{|SO|^2 + |ON|^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

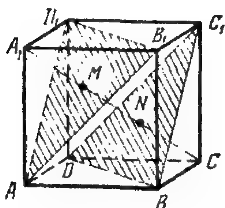
مساحت مثلث SMN از یک طرف برابر $\frac{1}{2}|SN|\cdot|MP|$ و از طرف دیگر برابر $\frac{1}{2}|MN|\cdot|SO|$ است. از اینرو $|MP| = \frac{|MN|\cdot|SO|}{|SN|} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$ حاصل شده و جواب مسئله عبارت از $2a/\sqrt{5}$ خواهد بود.



شکل ۱۶۳

مثال ٤ ● درمکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ اگر $|AB| = a$ باشد آنگاه فاصله بین صفحات AB_1D_1 و BDC_1 را محاسبه کنید.

حل ● قطر A_1C (شکل ١٦٤) مکعب بر صفحات AB_1D_1 و BDC_1 عمود است (نتیجه مثال ۳ بخش ١٢). از نتیجه مسئله ۳ بخش ۹ دریافت می‌شود که صفحات AB_1D و BDC_1 قطر A_1C را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.



شکل ١٦٤

یعنی اگر M و N نقاط تلاقی قطر A_1C با صفحات مزبور باشند آنگاه

$$|A_1M| = |MN| = |NC| = \frac{1}{3}|A_1C|$$

خواهد بود. طول پاره خط MN با فاصله صفحات AB_1D_1 و BDC_1 برابر است.

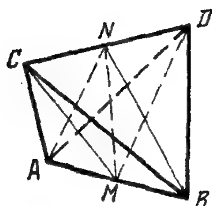
بدلیل $|A_1C| = \sqrt{3}a$ استنتاج می‌شود که $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ بوده و درنتیجه جواب مسئله عبارت از $a\sqrt{3}/3$ خواهد بود.

مثال ۵ ● در چهار وجهی $ABCD$ طول یال های AB و CD برابر a وطول یال های دیگر برابر b است. فاصلهٔ بین خطوط AB و CD را محاسبه کنید.

حل ● فرض می‌کنیم که M و N میانگاه یال های AB و CD باشد (شکل ١٦٥). در مثلث های متساوی الساقین ABC و ABD رابطه $|CM| = |DM| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ حاصل می‌شود.

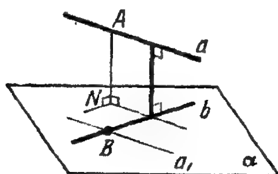
مثلث CMD متساوی الساقین بوده و بنابراین $(CD) \perp |MN|$ خواهد بود. این امر بدین معنی است که MN عمود مشترک خطوط AB و CD است.

از مثلث CMN درمی یابیم که $|MN| = \sqrt{|CM|^2 - |CN|^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$ است. یعنی جواب مسئله عبارت از $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$ خواهد بود.



شکل ۱۶۵

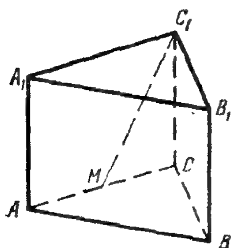
قضیه فرعی ● در یک چهاروجهی منتظم که طول یال آن a است هر پاره‌خط واصل میانگاه‌های یال های متناظر، عمود مشترک آن یال ها بوده و طول این پاره‌خط برابر $a/\sqrt{2}$ است. برای یافتن فاصله یال خطوط متنافر لازم است که عمود مشترک آنها را رسم کنیم. دو خط متنافر را همیشه می‌توان روی دو صفحه موازی رسم کرد. طرحی از رسم یکی از این صفحات (صفحه مارّ بر خط b) در شکل ۱۶۶ نشان داده شده است: B نقطه دلخواهی از خط b است، $a_1 \| a$، $a_1 \cap b = B$، $b \subset \alpha$، $a_1 \subset \alpha$. فاصله بین خطوط a و b با فاصله بین هر نقطهٔ خط a از صفحه α برابر است. از خط α نیز می‌توان صفحه β را به موازات صفحه a رسم کرد. فاصله بین صفحات α و β برابر فاصلهٔ بین خطوط a و b است.



شکل ۱۶۶

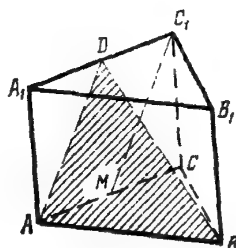
مثال ۶ ● در منشور مثلث القاعده منتظم شکل a ۱۶۷ تساوی های $|AB| = 4\text{ cm},\ |AA_1| = 3\text{ cm}$ را داریم. نقطه M میانگاه یال AC است. فاصله بین خطوط AB و C_1M را محاسبه کنید.

حل ● از نقطه A صفحه AA_1C_1C خطی به موازات خط C_1M رسم می‌کنیم. بدیهی است که این خط از D، میانگاه یال A_1C_1 عبور می‌کند (شکل b ۱۶۷). صفحه AD را به موازات خط C_1M از خطوط AB عبور می‌دهیم. فاصله بین خطوط AB و C_1M برابر فاصله نقطه ای از خط C_1M و صفحه ADB است. فاصله نقطه C_1 را از صفحه ADB در مثال 2 همین بخش بدست آورده ایم و مقدار آن $3/2\text{ cm}$ است. بنابراین جواب مسئله عبارت از $3/2\text{ cm}$ خواهد بود.



(a)

(b)



شکل ۱۶۷

بخش ۱۶ • زاویه دووجهی (فرجه). زاویه بین صفحات. نیمساز، کنج سه وجهی

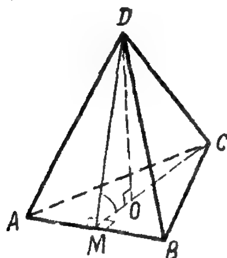
اندازه یک فرجه عبارت از اندازه زاویه مسطحه آن است. زاویه مسطحه عبارت از برشی از یک فرجه است. این برش با صفحهٔ عمود بر یال فرجه ایجاد می‌شود. اضلاع زاویه مسطحه بر یال فرجه عمود هستند. برای یافتن اندازه فرجه روش مناسب این است که زاویه مسطحه آن را رسم کرده و مقدار آن را پیدا می‌کنند.

مثال ۱ • فرجه تشکیل شده بر روی یال یک چهاروجهی منتظم را بیابید.

حل • فرجه واقع بر یال AB را پیدا می‌کنیم (شکل ۱۶۸). فرض می‌کنیم که DO ارتفاع سه وجهی و BM ارتفاع وجه ABD باشد.

آنگاه MO تصویر DM روی صفحه ABC بوده و درنتیجه $[MO] \perp [AB]$ خواهد بود. این امر بدین معنی است که $\angle DMO$ زاویه مسطحه ای است که رأس آن روی یال AB قرار دارد.

طول یال چهاروجهی را با a نشان می‌دهیم و آنگاه $|DM| = a\sqrt{3}/2$ را خواهیم داشت. نقطه O مرکز وجه ABC بوده و بنابراین $|MO| = a\sqrt{3}/6$ خواهد بود. از مثلث قائم الزاویه DMO درمی‌یابیم که $|MO|/|DM| = 1/3$ است.



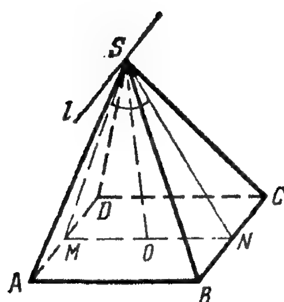
شکل ۱۶۸

از اینرو فرجه ای‌که روی یال AB تشکیل شده برابر $\arccos(1/3)$ است. همهٔ فرجه های تشکیل شده روی یال های یک چهار وجهی منتظم دارای همین مقدار هستند.

یعنی اندازه هریک از آنها برابر $\arccos(1/3)$ است.

مثال ۲ • طول همهٔ یال های هرم چهارگوش منتظم $SABCD$ باهم برابرند. اندازه فرجه بین وجوه SAD و SBC را بیابید.

حل • صفحه SBC از خط BC که موازی صفحه SAD است عبور کرده است $((BC) \parallel (AD))$، (شکل ۱۶۹). بنابراین فصل مشترک صفحات SBC و SAD عبارت از خط l است که از نقطه S به موازات خط BC عبور می‌کند. خط l یال فرجه ای است که بایستی آن را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم که M و N بترتیب میانگاه یال های AD و BC باشند. صفحه SMN بر یال l عمود است. درحقیقت $(BC) \perp (MN)$ و $(BC) \perp (SN)$ بوده و از اینرو $(BC) \perp (SMN)$ است. ولی $l \parallel (BC)$ بوده و درنتیجه $(SMN) \perp l$ را خواهیم داشت. از این امر استنتاج می‌شود که $\angle MSN$ زاویه مسطحه بین وجوه SBC و SAD است. طول یال هرم را با a نشان داده و فرض می‌کنیم که SO ارتفاع هرم است. عبارت $\angle MSN = \alpha$ را نیز درنظر می‌گیریم. در مثلث متساوی الساقین MSN روابط $|MN| = a$



شکل ۱۶۹

$|ON| = a/2$ ، $|MS| = |NS| = a\sqrt{3}/2$ ، داریم.
از اینرو $\sin(\alpha/2) = |ON|/|SN| = 1/\sqrt{3}$ استنتاج می‌شود.
حال درمی‌یابیم که $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) = 1/3$ ، $\alpha = \arccos(1/3)$ است.
یعنی جواب مسئله عبارت از $\arccos(1/3)$ خواهد بود.

دو صفحه متقاطع چهار فرجه تشکیل می‌دهند. اگر این فرجه ها باهم مساوی باشند دو صفحه مزبور متعامد خوانده می‌شوند و اندازه هر یک از این فرجه ها $\pi/2$ خواهد بود. اگر دو صفحه متقاطع متعامد نباشند در آنصورت کوچکترین فرجه تشکیل شده به عنوان زاویه بین آنها اختیار می‌شود. با این ترتیب زاویه بین دو صفحه متقاطع بین 0 و $\pi/2$ قرار دارد.

مثال ۳ ● در هرم مسدّس القاعده منتظم $SABCDEF$ نسبت ارتفاع به طول ضلع قاعده برابر $\sqrt{6} : 4$ است. زاویه بین صفحات SBC و SDE را محاسبه کنید.

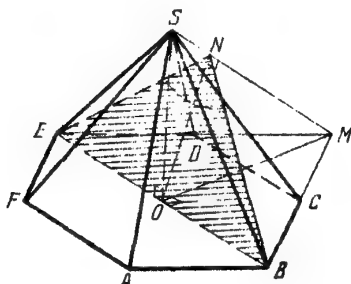
حل ● خط SM فصل مشترک صفحات SBC و SDE را رسم می‌کنیم (شکل ۱۷۰، $M=(BC)\cap(ED)$). برای یافتن فرجه ای با وجوه BSM و ESM ابتدا زاویه مسطحهٔ آن را رسم می‌کنیم مرکز قاعده هرم را نقطه O در نظر می‌گیریم. نقطه O میانگاه قطر BE بوده و بدلیل متساوی الاضلاع بودن مثلث BME، $(MO) \perp (BE)$ را داریم. خط MO تصویر خط SM روی صفحه قاعده بوده (SO بر این صفحه عمود است) و بنابراین $(SM) \perp (BNE)$ خواهد بود.

اگر ON ارتفاع مثلث SOM در نظر گرفته شود آنگاه از $(ON) \perp (SM)$ و $(SM) \perp (BE)$ نتیجه می‌شود $(SM) \perp (BNE)$ است، یعنی زاویه BNE زاویه مسطحه $BSME$ است. حال زاویه BNE را پیدا می‌کنیم. اگر طول ضلع قاعده هرم را با a نشان دهیم آنگاه $|BE| = |BM| = |EM| = 2a$ بوده و درنتیجه $|MO| = a\sqrt{3}$ را خواهیم داشت.

از مثلث قائم الزاویه SOM تساوی $|SM| = \sqrt{|SO|^2 + |OM|^2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}a$ استنتاج می‌شود. آنگاه $|ON| = \frac{|SO| \cdot |OM|}{|SM|} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ بدست می‌آید. از تقارن حول صفحه SOM نتیجه می‌شود که اگر $\angle BNE = \varphi$ باشد آنگاه $\angle BNO = \varphi/2$ خواهد بود.

از مثلث BON رابطه $\tan(\varphi/2) = |BO|/|ON| = \sqrt{3}$ بدست می‌آید که از آن نیز $\varphi = 2\pi/3$ حاصل می‌شود. این مقدار، برابر فرجه $BSME$ است. بدلیل $\varphi > \pi/2$ زاویه بین صفحات ESD و

BSC برابر $\pi/3 = \varphi - \pi$ خواهد بود. پس جواب مسئله معادل $\pi/3$ درمی‌آید.



شکل ۱۷۰

روش مختصاتی را نیز می‌توان برای یافتن زاویه بین صفحات مورد استفاده قرار داد. صفحاتی را با معادلات زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

اگر زاویه بین این صفحات را با φ نشان دهیم آنگاه رابطهٔ زیر حاصل می‌شود که در آن $\mathbf{n}_1 = (a_1;\ b_1;\ c_1)$ و $\mathbf{n}_2 = (a_2;\ b_2;\ c_2)$ است: $\cos\varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$

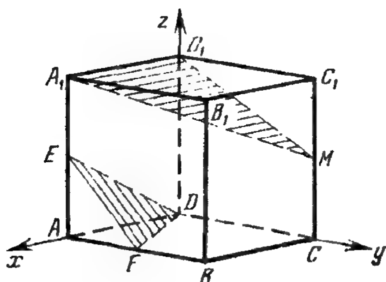
مثال ٤ ● نقاط E ، F و M در مکعب شکل ۱۷۱ بترتیب میانگاه یال های AA_1 ، AB و CC_1 هستند. زاویه بین صفحات EFD و A_1D_1M را بدست آورید.

حل ● دستگاه مختصات کارتزینی را همچون شکل ۱۷۱ در نظر می‌گیریم. با اختصاص a برای طول یال مکعب مختصات نقاطی از مکعب را بدست می‌آوریم:

$D(0$ و 0 و $0)$، $E(a$ و 0 و $a/2)$، $F(a$ و $a/2$ و $0)$، $A_1(a$ و 0 و $a)$، $D_1(0$ و 0 و $a)$ و $M(0$ و a و $a/2)$

از مختصات معلوم این نقاط معادله صفحه EFD را بدست می‌آوریم: $x - 2y - 2z = 0$.

همچنین معادله صفحه A_1D_1M بصورت رو برو بدست می‌آید: $y + 2z - 2a = 0$



شکل ۱۷۱

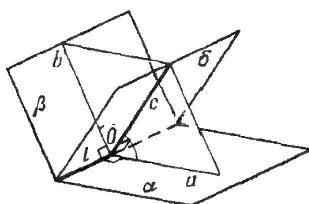
(قسمت هاشور خورده صفحه A_1D_1M در شکل ۱۷۱ برشی از مکعب محسوب نمی‌شود). بردار $\mathbf{n}_1 = (1;\ -2;\ -2)$ بر صفحه EFD و بردار $\mathbf{n}_2 = (0;\ 1;\ 2)$ بر صفحه A_1D_1M عمود است. φ ، زاویه بین این صفحات را بدست می‌آوریم:

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|1\cdot 0 - 2\cdot 1 - 2\cdot 2|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\varphi = \arccos(2/\sqrt{5})$$

نیمساز یک فرجه عبارت از نیم صفحه ای است که آن را به دو فرجه مساوی تقسیم می‌کند. نیمساز فرجه از یک طرف به یال فرجه محدود می‌شود. هر فرجه ای دارای یک نیمساز است. طریق رسم نیمساز فرجه به شرح زیر است: برای فرجهٔ مفروض زاویه مسطحه ای رسم می‌کنیم (شکل ۱۷۴)، سپس نیمساز این زاویه را نیز رسم می‌کنیم. نیم صفحه ای که بوسیله یال فرجه و این نیمساز تعریف می‌شود دقیقاً نیمساز فرجه مفروض بحساب می‌آید. حال این حکم را ثابت می‌کنیم.

اثبات: صفحه زاویه aOb (شکل ۱۷۲) بر l ، یال مشترک فرجه های $\alpha l\delta$ و $\delta l\beta$ عمود است. این امر بدین معنی است که زوایای aOc و cOb زوایای مسطحه این فرجه ها هستند. خط c نیمساز زاویه aOb بوده و بنابرآن $\alpha l\delta$ و $\delta l\beta$ برابر خواهند بود؛ یعنی δ نیمساز فرجه $\alpha l\beta$ است.



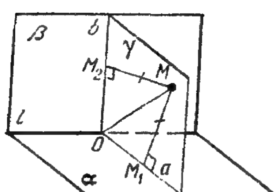
شکل ۱۷۲

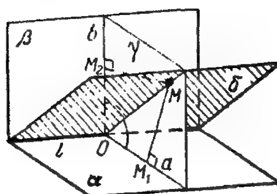
به آسانی می‌توان دریافت که نیمساز هر زاویه مسطحه یک فرجه به نیمساز آن فرجه متعلق است. نیمساز فرجه دارای تعدادی ویژگی مشابه با نیمساز زاویه مسطحه است.

مثال ۵ ● ثابت کنید نیمساز یک فرجه عبارت از مجموعه ای از نقاط داخل آن فرجه است که فواصل آنها از صفحات وجوه فرجه متساوی است.

اثبات ● مجموعهٔ نقاطی از داخل فرجه را که از صفحات وجوه فرجه به یک فاصله هستند با X و نیمساز فرجه را با δ نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که هر نقطه مجموعهٔ X به نیمساز تعلق دارد؛ یعنی $X \subset \delta$ است. ابتدا این نکته را مورد توجه قرار می‌دهیم که یال l فرجه (شکل a۱۷۳) هم به مجموعه X و هم به نیمساز δ تعلق دارد. بدیهی است که هیچیک از نقاط مجموعه X که به هردو فرجه متعلق هستند در خارج یال l قرار ندارند. حال نقاط داخلی فرجه را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که $M \in X$ باشد. صفحه γ را از نقطه M عمود بر یال l رسم می‌کنیم (شکل a۱۷۳). زاویه مسطحه aOb برشی برای فرجه محسوب می‌شود. فرض کنید که MM_1 و MM_2 بر خطوط محتوی نیمخط های a و b عمود باشند.

آنگاه MM_1 و MM_2 بر صفحات وجوه فرجه عمود بوده و از اینرو بدلیل $M \in X$، $|MM_1|=|MM_2|$ خواهد بود. این امر بدین معنی است که نقطه M زاویه aOb از خطوطی که محتوی آن زاویه است بیک فاصله می‌باشند. از هندسه مسطحه می‌دانیم که در این حالت نقطه مزبور به نیمساز زاویه aOb تعلق دارد. پس این نقطه به نیمساز δ تعلق داشته و بدین ترتیب $X \subset \delta$ ثابت می‌گردد.





(a) (b)

شکل ۱۷۳

توجه ● همانطوریکه ثابت شد، OM نیمساز زاویه مسطحه aOb بوده و بنابرآن نیم خط OM با نیم خط های a و b زوایای حاده تشکیل می‌دهد. از اینرو نتیجه می‌شود که پای عموهای MM_1 و MM_2 بترتیب روی نیم خط های a و b قرار دارند. شکل a۱۷۳ این موضوع را نشان می‌دهد. حال ثابت می‌کنیم که هر نقطه نیمساز به مجموعهٔ X تعلق دارد؛ یعنی $\delta \subset X$ است. همچنانکه مورد ملاحظه قرار گرفت نقاط یال l هم به نیمساز و هم به مجموعه X تعلق دارد. فرض می‌کنیم که نقطه M نقطه ای دلخواه از نیمساز بوده و به یال متعلق نباشد. مجدداً صفحه γ را از نقاط عمود عبور داده و بر یال l عمود می‌کنیم. از تقاطع آن با فرجه زاویه مسطحه aOb بدست می‌آید. (شکل b۱۷۳). نیمساز فرجه این زاویه مسطحه را در امتداد نیمساز آن قطع می‌کند. این امر به معنی این است که نقطه M به نیمساز زاویه aOb متعلق بوده و بنابرآن از خطوط محتوی اضلاع زاویه بیک فاصله است؛ یعنی $|MM_1| = |MM_2|$ است.

عمودهای MM_1 و MM_2 وارده براضلاع زاویه مسطحه بر صفحات وجوه فرجه نیز عمود هستند زیرا صفحه γ بر این صفحات عمود می‌باشد. نقطه M از صفحات وجوه فرجه نیز به یک فاصله خواهد بود، یعنی $M \in X$ است. از این امر نتیجه می‌شود که $\delta \subset X$ است. بدین ترتیب $X \subset \delta$ و $\delta \subset X$ ثابت می‌گردد. یعنی $X = \delta$ بوده و این همان چیزی است که می‌باید ثابت می‌کردیم.

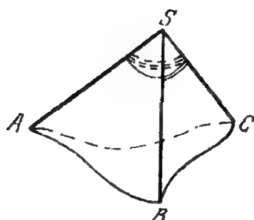
کنج سه وجهی ساده‌ترین نوع کنج چند وجهی است. برای تشریح یک کنج سه وجهی غالباً اندازه های زیر بکار گرفته می‌شود:

اندازه های سه زاویه مسطحه آن که ASB ، BSC و CSA وجوه آنها هستند (شکل ۱۷٤) و اندازه های سه فرجه تشکیل شده بر یال های SA ، SB و SC . این شش اندازه با هم ارتباط دارند. بخاطر داشته باشید که برای اینکه یک کنج سه وجهی با زوایای مسطحه α ، β و γ وجود داشته باشد شرط لازم و کافی این است که دو رابطه زیر برقرار باشد:

$$\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ \quad ، \quad |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

(حتی اگر یکی از این شرایط برقرار نشود آنگاه کنج سه وجهی با زوایای مسطحه مفروض بوجود

خواهد آمد).



شکل ۱۷۴

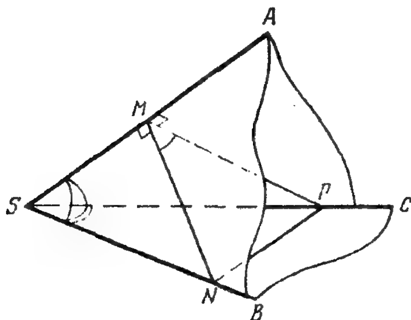
مثال ۶ ● در کنج سه وجهی $SABC$ ، زوایای مسطحه ASB ، ASC و فرجه تشکیل شده روی یال SA برابر $60°$ هستند. زاویه BSC را بدست آورید.

حل ● نقطه $M \neq S$ را روی یال SA اختیار کرده و خطوطی با شرایط زیر رسم می‌کنیم (شکل ۱۷۵):
$[MN] \perp [SA]$ و $[MP] \perp [SA)$

عبارت $a = |SM|$ را در نظر می‌گیریم. از مثلث های قائم الزاویه SMN و SMP درمی‌یابیم که
$|MN| = |MP| = a\sqrt{3}, \ |SN| = |SP| = 2a$
است. زاویه NMP زاویه مسطحه فرجه ای با یال SA بوده و بنابراین $\angle NMP = 60°$ خواهد بود.
حال در مثلث MNP به $|NP| = a\sqrt{3}$ وصول می‌یابیم.
طبق قانون کسینوس ها در مثلث SNP رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\cos NSP = \frac{|SN|^2 + |SP|^2 - |NP|^2}{2\,|SN| \cdot |SP|} = \frac{5}{8}$$

از این رابطه جواب مسئله بصورت $\angle NSP = \arccos\ (5/8)$ درمی‌آید.

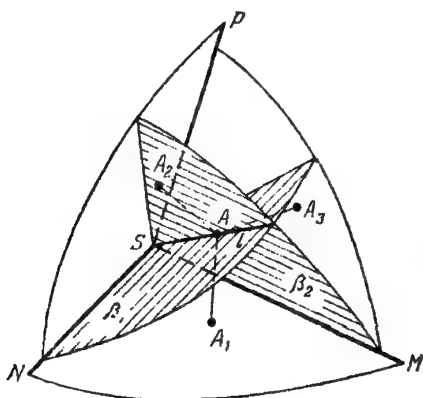


شکل ۱۷۵

مثال ۷ ● ثابت کنید نیمسازهای فرجه های یک کنج سه وجهی روی یک خط همدیگر را قطع می‌کنند.

اثبات ● دو نیمساز مثل β_1 و β_2 را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم (شکل ۱۷۶). فصل مشترک آنها نیمخطی با رأس S است. این نیم خط را با l نشان می‌دهیم. با شرط $A \neq S$ روی نیم خط l نقطهٔ دلخواهی مثل

A اختیار می‌کنیم. عمودهای AA_1، AA_2 و AA_3 را بر صفحات وجوه کنج وارد می‌سازیم. بدلیل $A \in \beta_1$ رابطه $|AA_1| = |AA_3|$ را داریم. و نیز بدلیل $A \in \beta_2$ رابطه $|AA_1| = |AA_2|$. این امر به معنی $|AA_3| = |AA_2|$ است؛ یعنی نقطه A از صفحات وجوه NSP و MSP بیک فاصله می‌باشد. از اینرو نتیجه می‌شود که نقطه A به نیمساز فرجه‌ای با یال SP متعلق است.
از آنجا که A نقطه دلخواهی از نیم‌خط l است از اینرو کل این نیم‌خط به نیمساز تعلق دارد.
بدین ترتیب نتیجه می‌شود که سه نیمساز فرجه‌ها در داخل کنج روی یک نیم‌خط همدیگر را قطع می‌کنند.

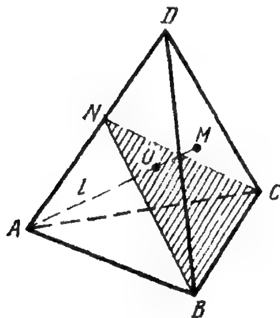


شکل ۱۷۶

از هندسه مسطحه می‌دانیم که نیمسازهای زوایای یک مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. نیمسازهای فرجه‌های یک کنج سه وجهی نیز ویژگی مشابهی دارند.

مثال ۸ ● ثابت کنید نیمسازهای فرجه‌های یک چهاروجهی همدیگر را در یک نقطه واقع در درون آن قطع می‌کنند.

اثبات ● l را نیم‌خطی در نظر می‌گیریم که عبارت از فصل مشترک نیمسازهای کنج سه وجهی با رأس A است. M را نیز نقطه تقاطع این نیم‌خط و وجه BCD در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷۷). دو سر پاره‌خط AM به دو وجه از فرجه‌ای با یال BC تعلق دارد و بنابراین نیمساز این فرجه پاره‌خط AM را قطع می‌کند. نقطه تلاقی آنها را با O نشان می‌دهیم. نقطه O به نیم‌خط l متعلق بوده و درنتیجه از صفحات ABC، ABD و ACD بیک فاصله خواهد بود.
در همان حال فواصل نقطه O تا صفحه ABC و BCD نیز مساوی است، زیرا این نقطه به نیمساز فرجه‌ای با یال BC متعلق است. بدین ترتیب در



شکل ۱۷۷

می‌یابیم که نقطه O از همهٔ صفحات وجوه چند وجهی بیک فاصله است؛ یعنی به نیمسازهای همهٔ فرجه های چند وجهی تعلق دارد.

بخش ۱۷ • محاسبه حجم چندوجهی ها و حجم قسمتی از چندوجهی ها

مثال ۱ • برش $A_1B_1C_1$ را در هرم مثلث القاعده $SABC$ به موازات قاعده طوری رسم می‌کنیم بطوریکه $|SA_1|/|SA| = k$ باشد. اگر V_1 و V به ترتیب حجم هرم های $SA_1B_1C_1$ و $SABC$ باشد آنگاه $V_1 = k^3V$ را ثابت کنید.

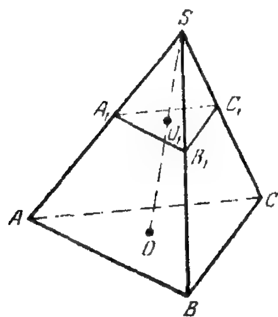
حل • تبدیل متجانس مرکز S و با نسبت تجانس k را درنظر می‌گیریم. مثلث $A_1B_1C_1$ (شکل ۱۷۸) تصویر مثلث ABC تحت این تبدیل بشمار می‌رود زیرا

$$|SB_1|/|SB| = |SC_1|/|SC| = |SA_1|/|SA| = k$$

است. درنتیجه $S_{A_1B_1C_1} = k^2S_{ABC}$ خواهد بود. فرض کنید SO ارتفاع هرم $SABC$ بوده و $O_1 = [SO] \cap (A_1B_1C_1)$ باشد. آنگاه SO_1 ارتفاع هرم $SA_1B_1C_1$ بوده و $|SO_1| = k|SO|$ خواهد بود. از اینرو نتیجه می‌شود که:

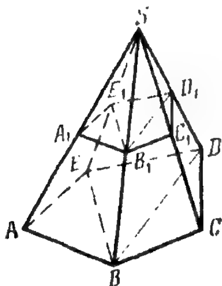
$$V_1 = \frac{1}{3}|SO_1|\, S_{A_1B_1C_1} = k^3 \cdot \frac{1}{3}|SO| \cdot S_{ABC} = k^3V$$

و این همان چیزی است که می‌بایست ثابت می‌کردیم.



شکل ۱۷۸

توجه • (۱) اگر یک هرم دلخواه با قاعدهٔ چند ضلعی مورد ملاحظه باشد بدیهی است که همین نتیجه بالا را بدست خواهیم آورد زیرا این نوع هرم را نیز می‌توان به‌عنوان اجتماع چندین هرم مثلث القاعده در نظر گرفت (شکل ۱۷۹)



شکل ۱۷۹

(۲) با استفاده از نتیجه حاصله در حل مثال ۱ برای محاسبهٔ حجم هرم ناقص می‌توان به آسانی فرمولی به صورت زیر استنتاج کرد که در آن H ارتفاع هرم ناقص و S_1 و S_2 مساحت قاعده های هرم ناقص است:

$$V=\frac{1}{3}H\ (S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$$

در محاسبهٔ حجم منشور علاوه بر فرمول $V = H\cdot Q$ که در آن H، ارتفاع منشور و Q مساحت قاعده آن است، می‌توان از فرمول $V = l\cdot S$ نیز استفاده کرد. در این فرمول l ،طول یال جانبی و S، مساحت برش قائم منشور است.

مثال ۲ ● حجم منشور مثلث القاعده $ABCA_1B_1C_1$ برابر V است. نقاط M و N را بترتیب روی یال های BB_1 و CC_1 طوری انتخاب می‌کنیم که $|BM|/|BB_1| = m$ ،$|CN|/|CC_1| = n$ باشد. حجم چند وجهی $ABCA_1MN$ (هرم ناقص) را بیابید.

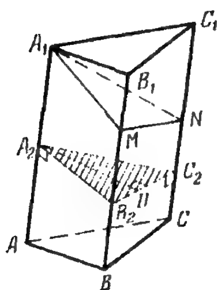
حل ● فرض می‌کنیم که $A_2B_2C_2$ برش قائم منشور (شکل ۱۸۰) و A_2D، ارتفاع همان برش باشد. با در نظر گرفتن عبارات $|AA_1| = l,\ |B_2C_2| = a,\ |A_2D| = h$ روابط زیر را داریم:

$$|BM| = ml,\quad |CN| = nl,\quad |B_1M| = (1-m)\,l,\quad |C_1N| = (1-n)\,l$$

حجم هرم $A_1B_1C_1NM$ را بدست می‌آوریم. قاعده این هرم عبارت از ذوزنقه B_1C_1NM است. ارتفاع ذوزنقه برابر $|B_2C_2|$ یعنی برابر a است. مساحت این ذوزنقه را بدست می‌آوریم:

$$S_{tr}=\frac{1}{2}\ (|B_1M|+|C_1N|)\cdot a=\ \frac{2-m-n}{2}\,al$$

توجه داریم که پاره‌خط A_2D بر صفحه BB_1C_1C عمود بوده و از اینرو ارتفاع مرسوم از رأس A_1 در هرم $A_1B_1C_1NM$ برابر $|A_2D| = h$ خواهد بود. بنابراین نتیجه می‌شود که اگر V_1 حجم هرم باشد آنگاه $V_1 = \frac{1}{3}hS_{tr} = \frac{1}{6}(2-m-n)\,lah$ خواهد بود. حال مساحت برش قائم منشور را بدست می‌آوریم: $S=\frac{1}{2}\,ah$



شکل ۱۸۰

این امر بدین معنی است که حجم کل منشور را می‌توان با فرمول $V = \frac{1}{2}\,lah$ بیان کرد. با مقایسه عبارات مربوط به V_1 و V درمی‌یابیم که $V_1 = \frac{1}{3}(2-m-n)\ V$ است. آنگاه متوجه می‌شویم که V_2، حجم چند وجهی $ABCA_1MN$ چنین است:

$$V_2 = V - V_1 = \frac{1+m+n}{3}\ V$$

برای محاسبه حجم یک چند وجهی اغلب از تبدیل و تکمیل آن چند وجهی به یک هرم یا منشور، و تقسیم چند وجهی به این اشکال فضایی استفاده می‌شود.

مثال ۳ ● از رأس A و میانگاه یال های BB_1 و B_1C_1 در منشور مثلث القاعده $ABCA_1B_1C_1$ برشی رسم

می‌کنیم. این برش منشور را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. نسبت حجم های آنها را پیدا کنید.

حل • برش را رسم می‌کنیم. میانگاه یال های BB_1 و B_1C_1 را با M و N نشان می‌دهیم (شکل ۱۸۱). نقاط $P = (SA) \cap (A_1C_1)$ و $S = (MN) \cap (CC_1)$ را مشخص می‌کنیم. برش حاصل عبارت از چهارضلعی $AMNP$ خواهد بود. حجم منشور را با V و حجم بخشی از آن را که شامل یال CC_1 است با V_1 نشان می دهیم. روش رسم برش طریق بیان V_1 را برحسب V نشان می‌دهد. نقطه $L = (MN) \cap (BC)$ را مشخص می‌کنیم.

برای یافتن V_1 بایستی حجم هرم های $SPNC_1$ و $MALB$ را از حجم هرم $SALC$ کم کنیم. و این حجم ها را می‌توان به آسانی برحسب منشور بیان کرد. ارتفاع منشور را با H، مساحت قاعده را با Q و حجم هرم های $SALC$ ، $SPNC_1$ و $MALB$ را بترتیب با V_2 ، V_3 و V_4 نشان می‌دهیم. M و N میانگاه یال ها بوده و $|BL| = \frac{1}{2}|BC|$ ، $|CL| = \frac{3}{2}|BC|$ را داریم.

از اینرو نتیجه می‌شود که $S_{ALC} = \frac{3}{2}Q$ است. از این گذشته داریم:

$$|SC_1| = \frac{1}{2}|CC_1| \quad و \quad |SC| = \frac{3}{2}|CC_1|$$

این امر بدین معنی است که ارتفاع هرم $SALC$ برابر $\frac{3}{2}H$ است.

رابطه $V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}H \times S_{ALC} = \frac{3}{4}HQ$ یعنی $V_2 = \frac{3}{4}V$ حاصل می‌شود. هرم $SPNC_1$ با نسبت $k = \frac{1}{3}$ $(|SC_1|/|SC| = 1/3)$ متجانس هرم $SALC$ است.

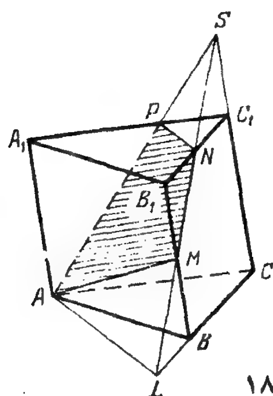
از اینجا $V_3 = k^3V_2 = \frac{1}{36}V$ استنتاج می‌شود. نقطه M میانگاه یال BB_1 بوده و ارتفاع هرم $MALB$ برابر $\frac{1}{2}H$ است. با توجه به $|BL| = \frac{1}{2}|BC|$ نتیجه می‌شود که $S_{ALB} = \frac{1}{2}Q$ است.

از این رابطه نتیجه می‌شود که:

$$V_4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}H\cdot\frac{1}{2}Q = \frac{1}{12}H\cdot Q = \frac{1}{12}V$$

آنگاه $V_1 = V_2 - V_3 - V_4 = \frac{23}{36}V$ حاصل می‌شود. حجم قطعه ای از هرم که شامل یال AA_1 است معادل $V - V_1 = 13/36$ می‌باشد.

بنابراین نسبت حجم های قطعات آن معادل 13/23 خواهد بود.



شکل ۱۸۱

بخش ۱۸ • مسائلی در مورد ترکیب چندوجهی ها

مثال ۱ • طول ضلع قاعدهٔ هرم مربع القاعده منتظمی برابر a و ارتفاع هرم نیز برابر h است. مکعبی را در

درون هرم طوری محاط می‌کنیم که چهار رأس آن روی قاعده هرم و چهار رأس دیگر آن روی وجوه جانبی هرم قرار گیرد، و نیز چهار یال از مکعب نیز موازی قطر قاعده هرم باشد. طول یال این مکعب را بدست آورید.

حل ● فرض می‌کنیم که چهار یال از مکعب موازی قطر AC از قاعده هرم باشد (شکل ۱۸۲). این یال ها را با MN، PQ، M_1N_1 و P_1Q_1 نشان می‌دهیم. طول یال مطلوب مکعب را با b مشخص می‌کنیم. برشی از هرم را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که با قاعده بالائی مکعب ایجاد شده است ($A_1B_1C_1D_1$ در شکل ۱۸۲). این چهار ضلعی مربع بوده و یال های M_1N_1 و P_1Q_1 مکعب با قطر A_1C_1 موازی است. از اینرو $\angle N_1M_1B_1 = \pi/4$ حاصل می‌شود. از این نکته به $\angle Q_1M_1A_1 = \pi/4$ وصول می‌یابیم؛ یعنی مثلث قائم الزاویه $M_1A_1Q_1$ متساوی الساقین نیز هست. از این گذشته مثلث های $M_1B_1N_1$ و $M_1A_1Q_1$ مساوی هستند زیرا وترهای آنها مساوی هستند: $|M_1N_1| = |M_1Q_1| = b$. این امر به معنی $|A_1M_1| = |B_1M_1|$ است. از اینرو $b = |M_1N_1| = |A_1C_1|/2$ استنتاج می‌شود.

حال این نکته را مورد استفاده قرار می‌دهیم که فاصله بین صفحات $A_1B_1C_1D_1$ و $ABCD$ برابر b است. فرض می‌کنیم که SO ارتفاع هرم بوده و $O_1 = [SO] \cap (A_1B_1C_1D_1)$ باشد. چنین داریم:

$$|OO_1| = b \,، \quad |SO_1| = h - b \quad ، \quad |SO_1|/|SO| = (h-b)/h$$

از اینرو $|A_1C_1|/|AC| = (h-b)/h$ استنتاج می‌شود.

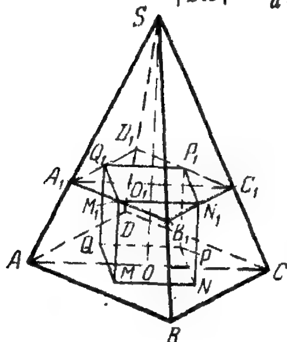
با منظور کردن $|A_1C_1| = 2b,\ |AC| = a\sqrt{2}$ رابطه $2b/a\sqrt{2} = (h-b)/h$ حاصل می‌شود که از آن نیز $b = ha/(a+\sqrt{2}h)$ بدست می‌آید.

پس جواب مسئله عبارت از $ah/(a+\sqrt{2}h)$ خواهد بود.

توجه داشته باشید که در حل این مسئله محاسبات و استدلالات را با این فرض انجام دادیم که موقعیت های مفروض برای هرم و مکعب در صورت مسئله امکان‌پذیر است. از حل مسئله استنتاج می‌شود که چنین مکعبی را می‌توان در هرم مفروض محاط کرد. در حقیقت برشی از هرم را به موازات قاعدهٔ آن از نقطه A_1 متعلق به یال SA طوری رسم می‌کنیم که $\frac{|SA_1|}{|SA|} = \frac{\sqrt{2}h}{a+\sqrt{2}h}$ باشد.

به آسانی می‌توان ثابت کرد میانگاه های اضلاع برش و پای عمودهای مرسوم از این نقاط بر صفحه قاعده هرم، رئوس مکعب مفروض در مسئله است.

از حل مسئله فوق استنتاج می‌شود که این نوع مکعب منحصر بفرد است.



شکل ۱۸۲

مثال ۲ ● طول ضلع قاعده منشور مثلث القاعده منتظم $ABCA_1B_1C_1$ برابر a است. دو یال چهار وجهی منتظمی روی خطوط مستقیم A_1B و B_1C قرار دارد. طول یال این چهار وجهی را بدست آورید.

حل ● بدیهی است خطوط A_1B و B_1C شامل یال های متنافر چند وجهی است. ولی این یال ها در چهار وجهی منتظم متعامد بوده (مثال ۲ بخش ۱۱) و درنتیجه خطوط A_1B و B_1C نیز باید متعامد باشند. این شرط ما را مجاز می‌دارد تا l ، طول یال جانبی مکعب را بدست آوریم. می‌دانیم که طول عمود مشترک یال های متنافر یک چهار وجهی منتظم برابر $b/\sqrt{2}$ است که در آن طول b یال چهار وجهی است (نتیجه مثال ۲ بخش ۱۱). این امر بدین معنی است که اگر فاصله بین خطوط A_1B و B_1C برابر d باشد آنگاه $b = d\sqrt{2}$ خواهد بود. حال با توجه به شرط ارائه شده در بالا، l، طول یال جانبی منشور را بدست می‌آوریم. قطر B_1C را روی صفحه AA_1B_1B تصویر می‌کنیم. تصویر آن عبارت از خط B_1M (شکل ۱۸۳a) است که در آن M میانگاه یال AB محسوب می‌شود. رابطهٔ $(A_1B) \perp (B_1C)$ موجب $(A_1B) \perp (B_1M)$ می‌شود. در این حالت مثلث های قائم الزاویه MB_1B و A_1BA متشابه بوده و بنابراین $|AA_1|/|MB| = |AB|/|BB_1|$ خواهد بود. از این رابطه $l^2 = a^2/2$ ، $l = a/\sqrt{2}$ نتیجه می‌شود. حال فاصله بین خطوط A_1B، B_1C را تعیین می‌کنیم. خط B_1D را بصورت $[B_1D] \parallel [A_1B]$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۸۳b). فاصله مطلوب برابر فاصله نقطه B از صفحه DB_1C است، یعنی برابر ارتفاع هرم BDB_1C مرسوم از رأس B است. حال به یافتن حجم هرمی مبادرت می‌کنیم که وجه DBC قاعده آن است. چنین داریم: $V = a^3/4\sqrt{6}$.

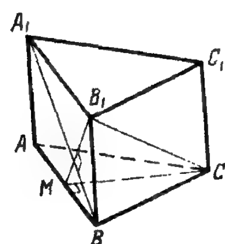
حال با منظور کردن وجه DB_1C به عنوان قاعده هرم نتیجه می‌شود که:

$$|DB_1| = |BA_1| = |B_1C| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

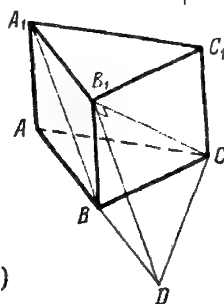
مثلث DB_1C بدلیل $(A_1B) \parallel (DB_1)$ و $(B_1C) \perp (A_1B)$، قائم الزاویه است. این امر به معنی

$$S_{DB_1C} = \frac{1}{2}|DB_1| \cdot |B_1C| = \frac{3a^2}{4}$$

است. با جاگذاری مقادیر V و S_{DB_1C} در فرمول $V = \frac{1}{3}d \cdot S_{DB_1C}$ به $d = a/\sqrt{6}$ وصول می‌یابیم. در تجزیه و تحلیل نهایی درمی‌یابیم که $b = d/\sqrt{2} = a/\sqrt{3}$ است. و درنتیجه جواب مسئله عبارت از $a/\sqrt{3}$ خواهد بود.



(a)



(b)

شکل ۱۸۳

بدیهی است که وقتی یال جانبی منشوری دارای طول حاصله در بالا باشد آنگاه با ترتیب ارائه شده در فرض مسئله می‌توان یک چند وجهی منتظمی را با آن ترکیب کرد. در اینصورت اقطار A_1B و B_1C متعامد خواهند بود. با جدا کردن پاره‌خط هایی بطول $b/2 = a/2\sqrt{3}$ روی هر یک از خطوط A_1B و B_1C از طرف پای عمود مشترک آنها چهار نقطه حاصل می‌شود که رئوس چند وجهی منتظم بشمار می‌روند.

مسائل

۵۷۲ • ثابت کنید صفحه متعامد بر هر یک از دو صفحه متقاطع بر فصل مشترک آنها نیز عمود خواهد بود.

۵۷۳ • هم ارزی گزاره های زیر را ثابت کنید

(a) طول یال های جانبی یک هرم مساوی است؛

(b) یال های جانبی هرم با صفحه قاعده آن زوایای متساوی درست می‌کنند.

(c) بر قاعده هرمی می‌توان یک دایره محیط کرد؛ ارتفاع هرم از مرکز این دایره می‌گذرد.

۵۷٤ • ثابت کنید صفحات متعامد بر یال های یک چهار وجهی که از میانگاه آنها عبور می‌کنند در یک نقطه مشترک اند.

۵۷۵ • طول ضلع قاعده هرم منتظم $SABCD$ برابر a وطول یال جانبی آن برابر l است. برشی از هرم را رسم کنید که بر یال جانبی SC عمود بوده و از میانگاه آن عبور کند.
اگر (a) $l=\sqrt{\frac{3}{2}}\,a$، (b) $l=\sqrt{\frac{5}{2}}\,a$ باشد آنگاه مساحت برش را محاسبه کنید.

۵۷۶ • از قطر AD_1 وجه AA_1D_1D در مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برشی را عمود بر صفحه BC_1D رسم می‌کنیم. این برش مکعب را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت حجم های آنها را بیابید.

۵۷۷ • یال جانبی SB از هرم مربع القاعده منتظم $SABCD$ با صفحه قاعده زاویه $\frac{\pi}{4}$ درست می‌کند. زاویه بین این یال وصفحه SCD را بیابید.

۵۷۸ • ثابت کنید ρ، فاصله نقط $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ از صفحه α با معادله $ax + by + cz + d = 0$ را می‌توان از طریق فرمول $\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ محاسبه کرد.

۵۷۹ • مختصات رئوس قاعده هرم منتظم $SABC$ به صورت زیر مفروض اند: $A(5$ ، 1 و $-1)$، $B(5$ ، -2 و $2)$ و $C(2$ و -2 و $-1)$. رأس S هرم در صفحهٔ مختصاتی Oyz قرار دارد. فاصله بین خطوط SB و AC را بیابید.

۵۸۰ • خط مستقیمی وجوه γ_1 و γ_2 از یک وجه را بترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. این خط با صفحهٔ وجه γ_1 زاویهٔ $\pi/6$ و با صفحه وجه γ_2 زاویه $\arcsin 0{\cdot}7$ می‌سازد. اندازهٔ فرجه برابر $\pi/3$ است. زاویه بین خط AB و یال فرجه را بدست آورید.

۵۸۱ • در هرم چهارگوش $SABCD$ که قاعدهٔ آن متوازی الاضلاع $ABCD$ است برشی را از یال AB

و میانگاه M یال SC رسم کرده ایم. این برش هرم را به دو قسمت تقسیم کرده است نسبت حجم های آنها را بدست آورید.

۵۸۲ ● حجم یک چهاروجهی برابر V است. همهٔ رئوس یک متوازی السطوح روی سطح چهاروجهی قرار دارد. سه وجه متوازی السطوح به سه وجه چهارضلعی متعلق است. بیشترین مساحت ممکنه برای چنین متوازی السطوحی را بدست آورید.

راهنمایی ها وراه حل های مسائل

فصل ۱

۲ ● $m, m\sqrt{3}$ و $2m$. ۳ ● $56\,cm$ و $42\,cm$. ۴ ● $9\sqrt{5}\,cm$ و $8\sqrt{10}\ \ cm$

۵ ● $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ ۶ ● $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$ ۷ ● $10\ cm$. ۸ ● $15\ cm$، $20\ cm$ و $25\ cm$.

۹ ● $\frac{m(m-n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ و $\frac{m(m+n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$. ۱۰ ● $\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right)-\frac{\alpha}{2}$.

۱۱ ● $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$

عبارات $\angle A=2x$ و $AB=c$ را در نظر بگیرید. ساق ها وسپس نیمسازهای زوایای مثلث را برحسب c و x بیان کنید.

۱۲ ● با منظور کردن $\angle ACK=\angle ACB=\alpha$ (CK ارتفاع، CM میانه و $AC<BC$ است)، $CK=h$ و $\angle ACB=x$ پاره‌خط های AK ، BK و MK را برحسب h، α و x بیان کنید. تساوی $2MK=BK-AK$ را در نظر بگیرید. به مثال ۱۰ بخش ۳ نیز مراجعه کنید.

۱۵ ● $6\ cm$. ۱۶ ● $\sqrt{10}\,cm$. ۱۷ ● $9\frac{1}{3}\,cm$. ۱۸ ● $7.2\ cm$.

۱۹ ● $\frac{l}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{3\alpha}{4}\right)}$. ۲۰ ● $\frac{2\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}$.

۲۱ ● $\frac{\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$. ۲۲ ● $\arccos\frac{1}{3}$، $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$، و $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

۲۳ ● $\frac{2\sqrt{3(p^2+q^2+pq)}}{3}$.

۲۴ ● از نقطه E خطی بصورت $EF\|AB$ رسم می‌کنیم (نقطه F روی AC قرار دارد) ونتایج ضروری را از متوازی الاضلاع $DBEF$ بدست می‌آوریم.

۲۵ ● $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$ ۲۶ ● $1:2$. در مثلث ADC میانخط را رسم کنید.

۲۷ ● $\frac{a\cos\alpha}{\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{2}\right)}$.   ۲۸ ● $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$ و $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}$ ۲۹ ● $\arctan\frac{1}{13}$

۳۰ ● $\arcsin\frac{72}{97}$.

۳۱ ● 85° از نقطه M عمودهای MK ، ML و MN را بترتیب بر اضلاع AB ، AC و BC وارد می‌کنیم. با در نظر گرفتن $\angle BMC=x$ و $AM=k$ خط MN را به عنوان عنصر مرجع به دو طریق برحسب k و x بیان می‌کنیم.

۳۷ 40° و 25° .   ۳۸ ● $4\,cm$، $6\,cm$ و $8\,cm$ یا $2\sqrt{6}\,cm$، $4\sqrt{6}\,cm$ و $6\,cm$؛ منفرجه.

۳۹ ● 0.75 .   ۴۰ ● قائم الزاویه.   ۴۱ ● $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.   ۴۲ ● $\sqrt{b(b+c)}$.

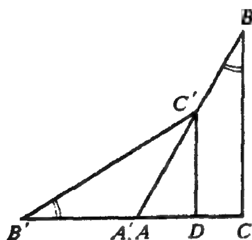
۴۳ ● $10\,cm$.   ۴۴ ● $3\sqrt{5}\,cm$، $10\,cm$ و $11\,cm$.

۴۵ ● $\arcsin\sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}$، اگر $k>2$ باشد؛ در صورت $1<k\leqslant 2$ جواب وجود ندارد.

۴۶ ● $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.   ۴۷ ● 45°

۵۴ ● حالت هایی را با مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین وقائم الزاویه در نظر بگیرید. در مورد مثلث اختیاری گزاره مثال ۸ بخش ۲ را مورد استفاده قرار دهید.

۵۵ ● دو مثلث را همچون شکل ۱۸۴ کنار هم قرار داده وخطی بصورت $C'D\|BC$ رسم کنید. از تشابه مثلث های $AC'D$ و ABC استفاده کنید.



شکل ۱۸۴

۵۶ ● زاویه ها را با x ، $2x$ و $4x$ نشان داده وبوسیله قانون سینوس ها، ضلع بزرگتر مثلث را برحسب ضلع کوچکتر بیان کنید.

۵۷ ● 90°، $22^\circ30'$ و $67^\circ30'$. ارتفاع، نیمساز و میانه مثلث ABC را بترتیب با CH ، CD و CM نشان دهید. با قرار دادن $\angle C=4x$ و $CH=h$ از $AH+MH=BH-MH$ استفاده کنید. همهٔ عناصر این تساوی را برحسب h و x بیان کنید.

۵۸ ● $A+B=90^\circ$ یا $|A-B|=90^\circ$. AD و BD را برحسب ارتفاع h وزوایای A و B بیان کنید. دو حالت را مورد ملاحظه قرار دهید: A زاویه حاده یا A یک زاویه منفرجه است.

۵۹ • $\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$. از نقطه K خطی بصورت $MP\|AC$ رسم کنید (نقطه M روی AB ونقطه P روی BC قرار داد). عبارت $MK=KP=PC=a$ را منظورکنید. پاره‌خط KC از مثلث KPC را برحسب a، α و β وپاره‌خط EK از مثلث MEK بیان کنید.

۶۱ • مستطیل، $a-b$. ۶۲ • $\sqrt{2n(m+n)}$ و $\sqrt{2(2m^2+3mn+n^2)}$.

۶۳ • 17 cm، 10 cm، 21 cm و $\sqrt{337}\text{ cm}$. ۶٤ • $\frac{\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

۶۵ • $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$. ۶۶ • $\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$ و $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$.

۶۷ • $\arccos\frac{7}{18}$.

۶۸ • $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ و $\pi-\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ — درصورت $\sqrt{2}\leqslant k<2$؛ اگر $k<\sqrt{2}$ یا $k\geqslant 2$ باشد جواب وجود نخواهد داشت.

۶۹ • اضلاع متوازی الاضلاع را با a و ka، اقطار آن را با d و kd نشان دهید. با استفاده از فرمولی که اضلاع و اقطار متوازی الاضلاع را بهم مربوط می‌سازد رابطه بین a و d را پیدا کرده وسپس از قانون کسینوس ها دوباره استفاده کنید.

۷۰ • با قرار دادن $\angle APB=\alpha$، $\angle ADB=\beta$ ثابت کنید که $\tan(\alpha+\beta)=1$ است.

۷۱ • $\sqrt{a^2+b^2+2b(\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\cos\alpha+b\sin^2\alpha)}$.
برای پیدا کردن زاویه منفرجه بین ضلع کوچکتر وقطر کوچکتر ازقانون سینوسها استفاده کرده وسپس با استفاده ازقانون کسینوسها قطررا پیدا کنید.

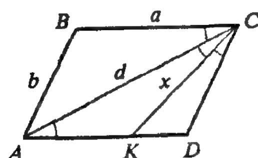
۷۲ • $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ و $\pi-\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$.

اضلاع متوازی الاضلاع را با px و qx و اقطار آن را با my و ny نشان دهید. از فرمولی که اقطار و اضلاع آن را بهم مربوط می‌سازد استفاده کرده وسپس قانون کسینوس ها را برای بیان یکی از اقطار برحسب اضلاع مورد کاربرد قرار دهید.

۷۳ • اگر $2<k$ باشد آنگاه $3\arccos\frac{2+k}{2k}$ و $\pi-3\arccos\frac{2+k}{2k}$ خواهد بود؛ اگر $2\leqslant k$ باشد جواب وجود نخواهد داشت.

تساوی های $BC=a$، $AB=b$ و $AC=d$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۸۵). نیمساز CK را درمثلث ADC رسم می‌کنیم. AK و CK ازمثلث متساوی الساقین ACK را برحسب α و $\angle ACK=x$ بیان می‌کنیم. از تشابه مثلث های ABC و CKD رابطه $\frac{a}{b}=2\cos x$ را استنتاج می‌کنیم. با استفاده از قضیه

مربوط به نیمساز مثلث ACD رابطه $d=2a\cos x-b$ را استنتاج می‌کنیم. با اضافه‌کردن شرط مسئله یعنی $d=\frac{2}{k}(a+b)$ به روابط حاصله، عناصر a، b و d را از تساوی ها حذف کرده و رابطه $\cos x=\frac{k+2}{2k}$ را بدست می‌آوریم.



شکل ۱۸۵

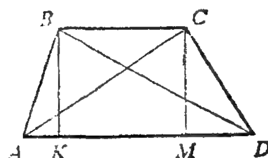
۷۸ ● 15 cm. ۷۹ ● 16 cm. ۸۰ ● 2 cm. ۸۱ ● $\frac{ac}{a+b}$، $\frac{ab}{a+b}$ و $\frac{bc}{a+b}$.

۸۲ ● 14 cm، 12.5 cm، 29.4 cm و 16.9 cm. ۸۳ ● $h\cot\alpha$. ۸۴ ● 1.5 .

۸۵ ● $\arctan\left(\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}\right)$ ۸۶ ● $\frac{b^2+ab-c^2}{b}$

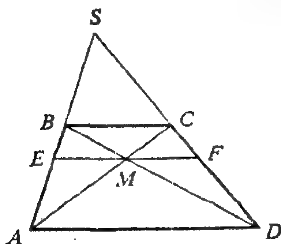
۸۷ ● در مثلث متساوی الاضلاع AOD خط KD بر AC عمود بوده و $KP=0.5CD$ است. نتیجه مشابهی رامی‌توان در مورد MP بدست آورد.

۸۸ ● $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D$ و $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$. (شکل ۱۸۶). این تساوی ها را تجمیع کرده و AK و MD را برحسب AB، CD و زوایای A و D بیان کرده و رابطهٔ $MD+AK=AD-BC$ را بکار بگیرید.



شکل ۱۸۶

۸۹ ● از نقطه M محل تلاقی اقطار ذوزنقه خطی بصورت $EF\|AD\|BC$ رسم کنید (شکل ۱۸۸).
از نسبت های $\frac{MF}{AD}=\frac{CF}{CD}=\frac{EM}{AD}=\frac{BE}{AB}$، $EM=$ ، $EM=MF$ بدست می‌آید.



شکل ۱۸۷

۹۰ ● $\frac{2ab}{a+b}$. به راهنمایی مسئله قبل مراجعه کنید.

۹۱ ● 40 cm. ثابت کنید که AKB و CED زوایای قائمه بوده و میانه ذوزنقه روی خط KE قرار دارد (به مسئله ۷۶ مراجعه کنید).

۹۲ • cm $\frac{49\sqrt{2}}{2}$. پاره‌خط OK را از مثلث قائم الزاویه OCD بدست آورید.
در مثلث OAB خطوطی بصورت $OP \perp AP$ رسم کرده و زوایای تشکیل شده از این رسم را مورد ملاحظه قرار دهید. ثابت کنید که $AM = CM$ و $OM = BM$ است.

۹۶ • $\frac{4ab}{a+b}$ ۹۷ • 9cm، $9\sqrt{3}$ cm و 18 cm ۱۰۰ • $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۱۰۱ • $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

۱۰۲ • از این نکته ها استفاده کنید که $PKLM$ (P، K، L و M میانگاه اضلاع متوالی چهارضلعی است) و $PEIF$ متوازی الاضلاع هستند (E و F میانگاه اقطار چهارضلعی است).

۱۰۳ • از ملاحظات بکار رفته در مسئله قبل استفاده کنید.

۱۰۴ • خلاف آن را در نظر بگیرید: یکی از زوایای بین اقطار حاده و دیگری منفرجه است. از قضیه ۹ بخش ۱ استفاده کنید.

۱۰۵ • قطر را رسم کرده و ثابت کنید میانگاه آن روی پاره‌خط مفروض قرار دارد.

۱۰۶ • $2a\sqrt{7}$ ۱۰۷ • $150°$ و $90°$

۱۰۸ • $\arctan\frac{11}{3}$. تانژانت های زوایای BAO ، OAD ، ODA و ODC را محاسبه کرده و بوسیله آنها تانژانت زاویه M را بدست آورید.

۱۰۹ • $\arctan\frac{1}{2}$. عبارات $AB=2x$, $BC=3x$ و $BD=4\sqrt{2}x$ را در نظر بگیرید.
از مثلث ABD ، AD را برحسب x بیان کرده و قانون کسینوس ها را مورد استفاده قرار دهید. ثابت کنید که زاویه BAD منفرجه است. این زاویه را بوسیله قانون سینوسها پیدا کنید.

۱۱۰ • $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$. عبارات $\angle BAE=\alpha$، $\angle KAD=\beta$، $\angle EAK=x$، $AD=a$ و $AB=ma$ را در نظر بگیرید. پاره‌خط های BE و KD و سپس $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را برحسب a و m بیان کرده و $\tan x=\cot(\alpha+\beta)$ را مورد استفاده قرار دهید.

۱۱۵ • $36°$، $60°$، $108°$ و $156°$ ۱۱۶ • 24 cm ۱۱۷ • $\frac{a}{6}(3\pm\sqrt{3})$ ۱۱۸ • $2\sqrt{Rr}$

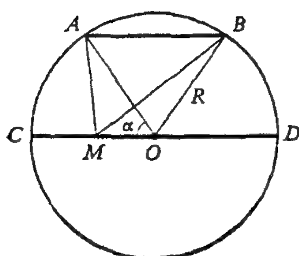
۱۱۹ • $\frac{\sqrt{14Rr-R^2-r^2}}{2\sqrt{3}}$ ۱۲۰ • $14\pi+12\sqrt{3}$ ۱۲۱ • 30 cm

۱۲۲ • $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ ۱۲۳ • $\frac{2a\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta}$ ، اگر $\beta>\alpha$ باشد.

۱۲۴ • تشابه مثلث های ABC و ABD را بکار بگیرید.

۱۲۵ • وتر AP را به موازات CD رسم کرده و از $AC=PD$ استفاده کنید.

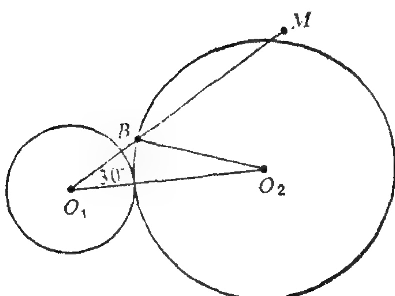
۱۲۶ • با قرار دادن $OA=OB=R$، $\angle AOM=\alpha$ (شکل ۱۸۸) و با استفاده از قانون کسینوس ها، AM از مثلث OAM و BM از مثلث BOM را بیان کنید.



شکل ۱۸۸

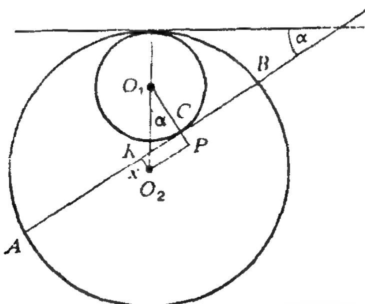
۱۲۷● $\frac{20}{3}$ cm و $\frac{15}{4}$ cm. ثابت کنید که $\angle BAC = 90°$ است. مماس مشترک داخلی را رسم کنید.

۱۲۸● $(7-3\sqrt{3}-\sqrt{7})\frac{R}{4}$ و $(2-\sqrt{7}-3\sqrt{3})\frac{R}{4}$. با قرار دادن $O_1B = x$، قانون کسینوسها را درمورد O_2B در مثلث O_2O_1B بکار بگیرید (شکل ۱۸۹).



شکل ۱۸۹

۱۲۹● $2\sqrt{b^2-((b-a)\cos\alpha-a)^2}$. عبارت $O_2K = x$ را در نظر بگیرید (شکل ۱۹۰). خط O_2P را موازی AB رسم کرده و در مثلث O_2O_1P که در آن $\angle O_2O_1P = \alpha$ است x را برحسب a، b و α بیان کنید.



شکل ۱۹۰

۱۳۵● 36°، 36° و 108°   ۱۳۶● $\frac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}$ ۱۳۷● 36 cm و 48 cm

۱۳۸● 12π cm   ۱۳۹● $3\sqrt{5}$ cm   ۱۴۰● $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

۱۴۱● $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}{2\sin\gamma}$

۱۴۲● $b\tan^2\frac{\alpha}{2}$

۱۴۳ ● اگر $k \geqslant 2$ باشد آنگاه جواب عبارت است از

$\arccos \frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$، $\arccos \frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$ و $\pi - 2\arccos \frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$ خواهد بود.

۱۴۴ ● با استفاده از فرمول های $r = \frac{a+b-c}{2}$ و $h = \frac{ab}{c}$ کسر $\frac{r}{h}$ را به شکل $\frac{\sin A + \cos A - 1}{\sin 2A}$ تبدیل کنید. سپس از $\sin 2A = \sqrt{(\sin A + \cos A)^2 - 1}$ استفاده کنید.

۱۴۵ ● ثابت کنید که مرکز ارتفاعی متقارن نقطه ای از دایره نسبت به ضلع مثلث است.

۱۴۶ ● نقطه K را روی AM طوری انتخاب کنید که $MK = BM$ باشد و ثابت کنید مثلث های ABK و BMC برابرند.

۱۴۷ ● از گزاره مسئله قبل استفاده کنید.

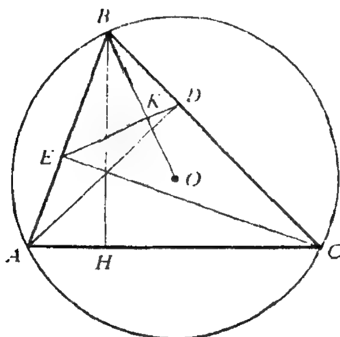
۱۴۸ ● شعاع دایره را با R نشان داده و عبارات $\angle ACK = \alpha$ و $\angle KCB = \beta$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قانون سینوسها AK، KC، AB و KB را برحسب R. α و β بیان کنید.

۱۴۹ ● ارتباط بین کسرهای طرف چپ تساوی و کتانژانت زوایای مثلث را بدست آورید.

۱۵۰ ● دایره‌ای بر مثلث ABC محیط کرده و نقطه M را روی وتر AB اختیار کنید. خطوطی با شرایط $MK \perp AC$، $MF \perp AB$ و $MD \perp BC$ رسم کنید. از این نکته استفاده کنید که می‌توان دایره هایی بر چهارضلعی های $MAKF$ و $MFBD$ محیط کرد. ثابت کنید که $\angle AFK = \angle DFB$ است.

۱۵۱ ● بر محیط ABC دایره‌ای محیط کرده و نیمساز CD را امتداد دهید تا دایره را در نقطه P قطع کند. از تشابه مثلث های BCD و ACP و از رابطه $BD \cdot AD = CD \cdot DP$ استفاده کنید.

۱۵۲ ● ثابت کنید که $\angle ABH = \angle OBC$ است (شکل ۱۹۱). سپس از تشابه مثلث های ABC و BDE (D و E پای ارتفاعات است) و تشابه مثلث های BHA و BDK استفاده کنید.



شکل ۱۹۱

۱۵۳ ● $(3+\sqrt{3})\text{cm}$. از رابطه $CD \cdot AD = BD^2$ استفاده کرده و قانون کسینوس ها را در مورد مثلث BAD بکار گیرید.

۱۵۴ ● $\frac{3R\sqrt{57}}{19}$ ۱۵۵ ● $120°$

۱۵۶ • $2\arctan\frac{\sqrt{k^2+6k+1}-k-1}{2}$ و $\pi-\arctan\frac{\sqrt{k^2+6k+1}-k-1}{2}$

۱۵۷ • $\arccos\frac{2}{3}$ ۱۵۹ • 12 cm   ۱۶۰ • $\frac{ac}{a+c}$

۱۶۱ • $2\sqrt{3}$ cm، $4\sqrt{3}$ cm و 6 cm   ۱۶۲ • $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ ۱۶۳ • 2 cm

۱۶۴ • $2\sqrt{6}$ cm   ۱۶۵ 2cm، 3 cm   ۱۶۶ • $30°$، $30°$ و $120°$؛

۱۶۷• $a(\pi-\beta-\gamma)\times\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

۱۶۹• $30°$، $30°$، $120°$، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

۱۷۰ • $35\frac{35}{47}$ cm. نوع مثلث را تعیین کنید.

۱۷۱ • $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. M را گرانیگاه و P را محل تلاقی CM و DE فرض کنید. رابطه $MP\cdot PC=PE\cdot DP$ را مورد استفاده قرار دهید.

۱۷۲ • $a^2+b^2=2c^2$. نتیجه حاصله در مسئله قبل را منظور کرده وفرمول میانه m_c برحسب اضلاع مثلث را مورد استفاده قرار دهید.

۱۷۳ • 2 cm و 4 cm. از این حقیقت استفاده کنید که محیط مثلث BDE از انتخاب نقطه تماس مستقل است. قانون کسینوسها را در مورد مثلث BDE بکار بگیرید.

۱۷۴ • $8\frac{1}{8}$cm. ثابت کنید که مثلث های DEC و ABC متشابه و نیز $DE=EC=15$cm است. از این نکته استفاده کنید که مرکز این دایره روی محل تلاقی AD وعمود مرسوم بر میانگاه DE قرار دارد و $\sin A=\frac{12}{13}$ است.

۱۷۵ • $\beta b\cot\beta$. از این موضوع استفاده کنید که پاره‌خط BH (H مرکز ارتفاعی مثلث است) محیط دایره بوده و $BH=2OK$ است (به مثال ۸ بخش ۲ رجوع کنید). در این رابطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC و OK عمود وارده از نقطه O بر AC است.

۱۷۷ • $10\frac{5}{8}$ cm   ۱۷۸ • $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos^2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$ ۱۷۹ • $\frac{8R}{5}$

۱۸۰• $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$

۱۸۱ • $\arccos\frac{k-1}{k}$؛ درصورت $k\geqslant 1$ ، $\pi-\arccos\frac{k-1}{k}$.

۱۸۲• $\dfrac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$

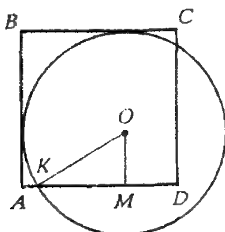
۱۸۳ • (α) فرض کنید که یکی از اقطار با اضلاع چهارضلعی زوایای α ، β ، γ و δ درست کند. a و b، c و m، d_1 و d_2 را برحسب شعاع دایره وزوایای α ، β ، γ و δ را بوسیله قانون کسینوس ها بیان کنید.

۱۸۴ • فرض کنید که ارتفاعات BD ، AF و CE در نقطه H همدیگر را قطع کنند. بر چهارضلعی

$AEHD$ دایره‌ای را محیط کرده و ثابت کنید $AC\cdot CD=CE\cdot CH=ab\cos C$ است. بطریق مشابه ثابت کنید $BD\cdot BH=ac\cos B,\ AF\cdot AH=bc\cos A$ بوده و آنگاه قانون کسینوس ها را در مورد هریک از اضلاع a، b و c اعمال کنید.

۱۸۵ ● $15\ cm$ و $20\ cm$. بر مثلث مفروض دایره‌ای را محیط کنید.

۱۸۶ ● $17\ cm$. قضیه فیثاغورس را در مورد مثلث OKM بکار بگیرید (شکل ۱۹۲)



شکل ۱۹۲

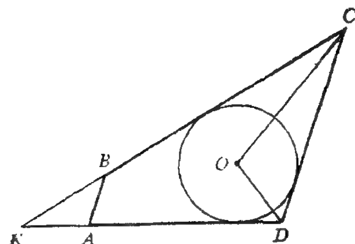
۱۸۷ ● $2\ cm$ و $2\ cm$. از این موضوع استفاده کنید که محیط مثلث AMP از انتخاب نقطه تماس مستقل است. قانون کسینوسها را در مورد AMP اعمال کنید.

۱۸۸ ● اگر $k\geqslant\sqrt{2}$ باشد $\arcsin\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}$ خواهد بود. شعاع دایره محاطی را با r وزاویه حاده ذوزنقه را با x نشان دهید. اضلاع ذوزنقه، قطر و سپس شعاع دایره محیطی را برحسب r و x بیان کنید.

۱۸۹ ● $\sqrt{4\tan^2\alpha+3}$ 2. ثابت کنید EM میانه مثلث CED بوده و بنابرآن $EM=\frac{1}{2}CD$ است.

۱۹۰ ● $\frac{30\tan\alpha}{\sqrt{25+36\tan^2\alpha}}$. ثابت کنید EH بر AB عمود است.

۱۹۱ ● $\sqrt{\frac{65}{2}}$. ثابت کنید $\sin\angle(A+B)<0$ است. این امر بدین معنی است که خطوط مستقیم AD و BC در نقطه K همدیگر را قطع می‌کنند که طرف چپ AB قرار دارد (شکل ۱۹۳). زوایای مثلث ODC را بدست آورید.



شکل ۱۹۳

۱۹۳ ● $12\sqrt{5}\ cm$ ۱۹۴ ● $2\frac{46}{49}\ cm$

۱۹۵ ● $\sqrt{10}\ cm$ ۱۹۶ ● $\frac{R}{2}(\sqrt{7}-1)$

۱۹۷ ● $\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ ۱۹۸ ● $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$

۱۹۹ ● $\frac{2}{5}R\sqrt{4+\sin^2\alpha}-\frac{4}{5}R\cos\alpha$ ۲۰۰ ● $\frac{4R\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}$

۲۰۱ ● $\frac{R}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha+\sqrt{3+\sin^2\alpha})$ ۲۰۲ ● $\frac{2a\sqrt{ab}}{b}$ ۲۰۳ ● $3\ cm$

۲۰۴ ● $\frac{b}{2}\tan^3\frac{\alpha}{2}$ ۲۰۵ ● $4R\sin^3\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{4}$ ۲۰۶ ● $0.6a$

۲۰۷ ● $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$ cm   ۲۰۸ ● $\frac{a\sqrt{3}+r-\sqrt{4r^2+2ar\sqrt{3}}}{3}$، $r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}a$

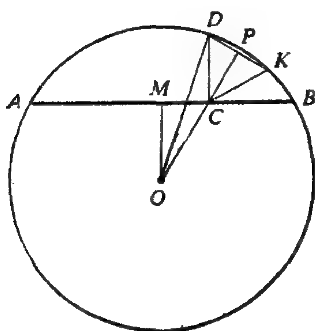
۲۰۹ ● $\frac{b}{2}\tan\frac{\alpha}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ ۲۱۰ ● $\frac{b}{4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

۲۱۱ ● $4R\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$

۲۱۲ ● فرض کنید که دایره‌های محیطی مثلث های ADM و BDK در نقطه P همدیگر را قطع کنند. بخاطر داشته باشید که $\angle DAM+\angle DPM=180°$ و $\angle MCK+\angle MPK=180°$ است. ثابت کنید $\angle DBK+\angle DPK=180°$ برقرار می‌باشد.

۲۱۳ ● $120°$. شعاع دایره محاطی را به عنوان عنصر مرجع برحسب عناصر خطی معلوم و $\angle AOB=2x$ از دو مثلث O_1PH و O_1MB بیان کنید. P میانگاه KH و M میانگاه AB است.

۲۱۴ ● $R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$، اگر $\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$ باشد. OC را برحسب R و α بیان کرده و قانون کسینوسها را در مورد مثلث ODC (شکل ۱۹۴) بیان کنید. در این مثلث $CD=x$، $OD=R$ و $\angle OCD=150°$ است.



شکل ۱۹۴

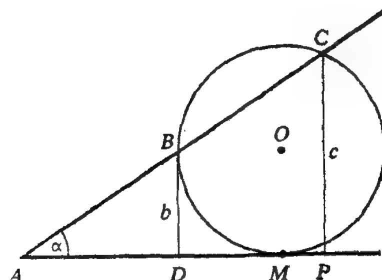
۲۱۵ ● $2r\tan\frac{\alpha}{2}\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\right)$. قانون کسینوسها را در مورد مثلث OAO_1 اعمال کنید بطوریکه در آن O و O_1 مراکز دایره‌هاست.

۲۱۶ ● $\tan^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{r^2+\arcsin\alpha}-r-a\cot\frac{\alpha}{2}\right)$. راهنمایی مسئله قبل را ملاحظه کنید.

۲۱۷ ● $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(b\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{4r^2-b^2}\sin\frac{\alpha}{2}-2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. کسینوس زاویه OAO_1 را پیدا کرده

وقانون کسینوسها را در مورد زاویه OAO_1 اعمال کنید (O و O_1 مراکز دایره هاست).

۲۱۸ • $\frac{b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$. از روابط $AM^2=AC\cdot AB$ (شکل ۱۹۵) و $AM=AD+DM$ استفاده کنید.



شکل ۱۹۵

۲۱۹ • $DE=\frac{b^2-a^2}{b}$ و $R=\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2b\sin\alpha}$. از رابطهٔ $OC^2=OD\cdot OE$ استفاده کنید.
قانون سینوسها و کسینوسها را در مورد مثلث های OEC ، ODC و CED اعمال کنید.

۲۲۳ • $360\ cm^2$ ۲۲٤ • (a) $9\ cm^2$; (b) $3\ cm^2$; (c) $12\ cm^2$

۲۲۵ • $4\ cm^2$ ۲۲۶ • $\frac{a^2}{2}(3+2\sqrt{2})$ ۲۲۷ • $\frac{180\sqrt{3}}{19}$

۲۲۸ • $\frac{1}{4}c^2(q^2-1)$، اگر $1<q\leqslant\sqrt{2}$ باشد.

۲۲۹ • $m^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cot\alpha$ ۲۳۰ • $m\sin\beta\,(\sqrt{c^2-m^2\sin^2\beta}+m\cos\beta)$

۲۳۱ • $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}$ ۲۳۲ • $\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$

۲۳۳ • (a) $\frac{\tan\frac{|\alpha-\gamma|}{2}}{2\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}$ ، (b) $\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$ ، (c) $\frac{\tan\frac{|\alpha-\gamma|}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

۲۳٤ • $\frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$ ۲۳۵ • $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

۲۳۶ • اضلاع مثلث را برحسب R وزوایای A ، B و C (با استفاده از قانون سینوسها) بیان کرده و ثابت کنید $\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{3}{4}$ است.

۲۳۷ • $ab\sqrt{3}$. مساحت مثلث را بدوطریق بیان کنید: بوسیله فرمول هرو وفرمول $S=pr$.

۲۳۸ • $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.
عبارات $BQ=x$ ، $CQ=y$ را منظور کرده و از تساوی های $\frac{S_{ABC}}{S_2}=\left(\frac{x+y}{y}\right)^2$ و $\frac{S_1}{S_2}=\frac{x^2}{y^2}$ استفاده کنید.

۲۳۹ • $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$ راهنمایی مسئله قبل را ملاحظه کنید.

۲۴۰ • $\frac{720}{17}$. نوع مثلث را تعیین کنید.

۲۴۱ • $200\ cm^2$. فرض کنید که AK و CM عمودهای وارده بر مماس و BD ارتفاع مثلث ABC باشد. از تشابه مثلث های AKB و BMC تساوی $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{16}$ و از تشابه مثلث های AKB و BDC تساوی $\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{25}$ را بر پا سازید.

۲۴۲ • $\frac{abc}{mkc+nkb+mna}$. رابطه $S_{DEF}=S_{MDE}+S_{MEF}+S_{MDF}$ را بکار گرفته و S_{DEF} را برحسب m ، n و k وسینوس زوایای مثلث ABC بیان کنید. سپس سینوس زوایای مثلث ABC را برحسب مساحت و اضلاع آن بیان کنید.

۲۴۳ • $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. از تشابه مثلث های ABC و BFD (به مثال ۱۱ بخش ۳ رجوع کنید) رابطهٔ $FD=b\cos\beta$ را استنتاج کرده وبطریق مشابه $DE=c\cos\gamma$ را بدست آورید. رابطهٔ $\angle ABE=\angle FDA=\angle ADE=\angle FCA$ (به مثال ۳ بخش ۱ مراجعه کنید) را بکار گرفته وزاویه FDE را برحسب زاویه $B\hat{A}C$ بیان کنید.

۲۴۴ • $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. عبارات $AC=b$ و $BC=a$ را در نظر بگیرید. با اعمال قانون کسینوسها در مورد مثلث های ABC ، ACD و BCD دستگاه زیر حاصل می‌شود: $\begin{cases}2a^2+b^2=12,\\ a^2+b^2+ab=9.\end{cases}$

۲۴۵ • $3\sqrt{2}$. به راهنمایی مسئله قبل رجوع کنید.

۲۴۶ • $\frac{27}{65}\ cm^2$. به مثال ۵ بخش ٤ مراجعه کنید.

۲۴۷ • $210\ cm^2$. فرض کنید که $OP\perp AC$ ($OP=10$ cm)، BH ارتفاع مثلث ABC و $OK\perp BH$ است. از مثلث BHD درمی‌یابیم که $BH=20$ cm است. آنگاه در مثلث OBK ، $BK=10$cm و $\angle OBK=\angle BDH$ می‌باشد. از این مثلث شعاع دایره وسپس AP ، AC را پیدا می‌کنیم. با استفاده از فرمول $CD\cdot AD=BD^2$ مقدار CD را بدست می‌آوریم.

۲۴۹ • $\frac{(a-b)^2\sin\alpha}{2}$ ۲۵۰ • a^2، ۲۵۱ • $135\ cm^2$ ۲۵۲ • $48\ cm^2$

۲۵۳ • $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$ ۲۵٤ • $147\ cm^2$ ۲۵۵ • $126\ cm^2$

۲۵۶ • $1476\ cm^2$ ۲۵۷ • $336\ cm^2$ ۲۵۸ • $168\ cm^2$ ۲۵۹ • $25\sqrt{3}\ cm^2$

۲۶۰ • $150\ cm^2$ ۲۶۱ • $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\tan\alpha$ ۲۶۲ • $2R^2\sin 2\alpha\sin^2\alpha$

۲۶۳ • $\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$ ۲۶٤ • $\frac{H^2}{2}\sin\beta\cos(\alpha-\gamma)$

۲۶۵ • ارتفاع BH را رسم کرده و نقطه M را بر نقطه H منطبق کنید.

۲۶۶ • $(a+b)^2$. ثابت کنید که $S_{AOB}=S_{COD}$ است.رابطه $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}}=\frac{BO}{OD}=\frac{b}{a}$ را بکار بگیرید.

۲۶۷ • $20\ cm^2$. خطوط مستقیم لوزی را به نه قسمت تقسیم می‌کنند. چهارتا از این قسمتها مثلث

است. مساحت هریک از مثلث ها را با x نشان داده وثابت کنید مساحت هرچهارضلعی مجاور به ضلع لوزی برابر $3x$ است. مساحت مثلث ABN را برحسب مساحت لوزی بیان کنید.

۲۶۸ • $\frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$. به مثال ۷ بخش ۳ رجوع کنید.

۲۶۹ • $70\ cm^2$. از تساوی $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}}=\frac{AO}{OC}$ استفاده کنید.

۲۷۰ • $40\ cm^2$. KD را با x نشان دهید (P و M بترتیب نقاط تماس دایره با AD و AB است). تساوی $PD^2=CD\cdot KD$ را بکار گرفته پاره‌خط های PD ، OP و MK را برحسب x بیان کنید.

۲۷۱ • $20\ cm^2$ و $10.4\ cm^2$. عبارات $AB=x$ ، $BC=2x$ و $\angle ABM=\alpha$ را منظور کنید. قانون کسینوس ها را در مورد AM (در مثلث ABM) و CM (در مثلث BMC) اعمال کرده وسپس فرمول $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ را بکار گیرید.

۲۷۲ • $4S+2c^2$. ۲۷۳ • $926\ cm^2$ ۲۷۴ • $2a^2(\sqrt{2}-1)$

۲۷۵ • $\frac{3}{2}a^2$ ۲۷۶ • $(\sqrt{3}+1)\ cm^2$ ۲۷۷ • $\frac{R^2}{4}(8\sqrt{3}-9)$. ۲۷۸ • $\frac{37}{64}$.

۲۷۹ • $11 cm^2$. عبارات $BF=x$، $AF=2x$، $BK=y$، $CK=3y$ را منظور کرده و مساحت‌های مثلث های BKF و ABC را مقایسه کنید.

۲۸۰ • $\frac{784}{7225}$. ۲۸۱ • $\frac{a^2}{24}(3\sqrt{3}-\pi)$ ۲۸۲ • $\frac{5\sqrt{3}\pi-18}{54}$

۲۸۳ • (a). $\frac{a-b}{a+b}$ (a^2-b^2) arccos $(a+b)\sqrt{ab}-\frac{\pi b^2}{2}-\frac{1}{2}(a^2-b^2)\arccos\frac{a-b}{a+b}$ ؛ (b) $\frac{\pi a^2b^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4}$

۲۸۴ • $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$ ۲۸۵ • $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$

۲۸۶ • (a) $(2\sqrt{3}-\pi)\frac{R^2}{6}(7-4\sqrt{3})$ ؛ (b) $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$ ؛ (c) $\frac{2R^2}{9}(3\sqrt{3}-\pi)$

۲۸۷ • $R^2(\alpha+\sin\alpha)$ ۲۸۸ • $\frac{\pi a^2}{6}$ ۲۸۹ • $10R^2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$

۲۹۰ • $\frac{\pi a^2}{18}(2-\sqrt{3})$ ۲۹۱ • $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})(4+\sqrt{7})}{27}$

۲۹۲ • ثابت کنید که $CD^2=AC\cdot BC$ است.

۲۹۳ • $\frac{b^2}{4}\cot\beta(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta))$. از این نکته استفاده کنید که دایره از نقطه C می‌گذرد.

۲۹۴ • $\left(\cot\alpha+\pi-\frac{\pi n}{2}\right)\frac{na^2}{1+\tan^2\alpha}$؛ در این رابطه $\alpha=\frac{\pi}{n}$ است. مساحت شکل «ستاره‌ای» عبارت از تفاضل مساحت n ضلعی با رئوس واقع بر مراکز دایره‌ها و مساحت n تا قطاع است.

۲۹۵ • $\left(\cot\alpha+\pi-\frac{\pi n}{2}\right)\frac{na^2\cos^2\alpha}{4(1+\sin\alpha)^2}$. در این رابطه $\alpha=\frac{\pi}{n}$ است. به راهنمایی مسئله قبل مراجعه کنید

۳۰۱ • $75\ cm$.

۳۰۲ • $2\sqrt{\frac{S}{3}\cot\frac{\alpha}{2}}$ ۳۰۳ • (a) $\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$ ؛ (b) $\frac{ab\sin\gamma}{c}$

۳۰۴ • $\sqrt{\dfrac{a^2 \sin\alpha + 2ah\cos\alpha - 2ah}{\sin\alpha}}$ ۳۰۵ • $\sqrt{\dfrac{2}{4-\pi}}$ ۳۰۶ • $\arctan \dfrac{a^2-b^2}{4S}$

۳۰۷ • $\dfrac{\sqrt{2S \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}}{\sin\alpha}$ ۳۰۸ • $120°$ و $\sqrt{3}$ cm

۳۰۹ • $\dfrac{7\sqrt{145}}{5}$ cm

۳۱۰ • عبارات $b=a+d$ و $c=a+2d$ را در نظر گرفته و مساحت S را برحسب a و d بیان کنید. فرمول هرو را بکار گرفته و سپس فرمول های $R=\dfrac{abc}{4S}$ و $r=\dfrac{S}{p}$ را مورد استفاده قرار دهید.

۳۱۱ • $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. فرض کنید که ارتفاع ذوزنقه بوسیله پاره خط x به قسمت های h و kh $(k>1)$ تقسیم شود. آنگاه $h(k+1)\dfrac{a+b}{2}\dfrac{1}{2}=kh\dfrac{b+x}{2}$ و $\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{x-b}{a-b}$ را خواهیم داشت. از این دستگاه x را بیابید.

۳۱۲ • 14.4 cm . تشابه مثلث AKD و CKM را بکار بگیرید. K نقطه تلاقی AM و CD است.

۳۱۳ • 4.5 cm. به مثال ۱۱ بخش ۳ مراجعه کنید.

۳۱۴ • 24 cm. به مثال ۱۱ بخش ۳ مراجعه کنید.

۳۱۵ • 4 cm. مثال ٤ بخش ٤ را ملاحظه کنید.

۳۱۶ • $\dfrac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$. عبارات $AC=x$ و $AB=y$ را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را برحسب x و y بیان کنید. ثابت کنید $\dfrac{y}{x}=\dfrac{S_1}{S_2}$ است.

۳۱۷ • 8.25 cm . شعاع دایره محیطی را بدست آورده و گزاره حاصل از مثال ۸ بخش ۲ را ملاحظه کنید.

۳۱۸ • $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm، $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$ cm . ثابت کنید که $a:b:c=4:13:15$ است. عبارات $a=4x$، $b=13x$ و $c=15x$ را منظور کنید.

۳۱۹ • $\dfrac{2\cos\frac{\gamma}{3}+3}{1+6\cos\frac{\gamma}{3}}$. با معرفی پارامتر کمکی $AC=b$ آنگاه $BC=3b$ خواهد بود. روش مساحت ها را بصورت $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACK}+S_{KCB}$ بکار بگیرید.

۳۲۰ • $\dfrac{\sqrt{7}}{9}(4+\sqrt{7})$. مثال ۱۳ بخش ٤ را ملاحظه کنید.

۳۲۱ • $\dfrac{33+12\sqrt{6}}{25}$. به مثال ۱۳ بخش ٤ مراجعه کنید.

۳۲۳ • مثلث های $A_1B_1C_1$ و PQR نسبت به نقطه M متقارن هستند.

۳۲٤ • تقارن را نسبت به میانگاه ضلعی مورد ملاحظه قرار دهید که طول آن مجهول است. آنگاه مثلث را می‌توان با اضلاع a ، b و $2m$ رسم کرد. طول میانه درمحدودهٔ $\dfrac{a-b}{2}<m<\dfrac{a+b}{2}$ تغییر می‌کند که در آن m طول میانه مفروض است.

۳۲۵ • ثابت کنید که نقطه تلاقی مثلث مرکز تقارن است که مثلث ABC را به مثلث رسم شده انتقال می‌دهد.

۳۲۶ • تقارن نسبت به نقطه P را مورد ملاحظه قرار دهید.

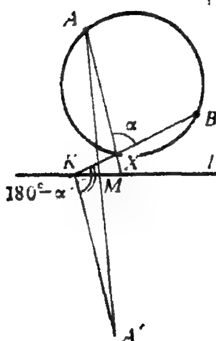
۳۲۷ • از این موضوع استفاده کنید که نقطه تلاقی اقطار متوازی الاضلاع مرکز تقارن آن است.

۳۲۸ • از مرکز تقارن متوازی الاضلاع خط مستقیمی عبور دهید.

۳۲۹ • از این نکات استفاده کنید که مرکز دایره مرکز تقارن آن بوده و خطوط متناظر در تقارن مرکزی موازی هستند.

۳۳۰ • مرکز دایره مرکز تقارن شش ضلعی محیطی است.

۳۳۱ • ثابت کنید که نقطه O محل تلاقی اقطار AD و BE مرکز تقارن شش ضلعی $ABCDEF$ است. از این گذشته $S_{\Delta COA} = S_{\Delta OAF}$، $S_{\Delta COE} = S_{\Delta OEF}$ و $S_{\Delta EOA} = S_{\Delta ODE}$ است. با تجمیع این تساویها به رابطهٔ $S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$ می‌رسیم.



۳۳۲ • فرض کنید که نقطه A' متقارن نقطه A نسبت به نقطه M باشد (شکل ۱۹۶).
آنگاه زاویه BKA' معلوم بوده (K نقطه تلاقی خطوط BX و l است) و مقدار آن برابر $180° - \alpha$ خواهد بود.
این مسئله دارای دو جواب است.

شکل ۱۹۶

۳۳۳ • خط مطلوب m از نقاطی عبور می‌کند که نسبت به نقطه M متقارن بوده و به اضلاع زاویه ABC تعلق دارند. برای اثبات این گزاره نشان دهید که مساحت مثلث ایجاد شده در اثر برش خط l که محتوی نقطه M است و با خط m متفاوت است از مساحت مثلث حاصله بوسیله خط m بزرگتر است.

۳۳۴ • از تقارنی استفاده کنید که مرکز آن بر مرکز دایره منطبق است.

۳۳۵ • میانگاه ضلع BC (نقطه M) مرکز تقارن متوازی الاضلاع $BXCY$ است (شکل ۱۹۷). بنابراین تبدیلی که x را به y انتقال می‌دهد تقارنی نسبت به M یا تبدیل متجانس H_1 با نسبت تجانس $k_1 = -1$ و مرکز M است. بدلیل $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AZ}$، $\overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{MY}$ است. درنتیجه تبدیلی که Y را به Z انتقال می‌دهد عبارت از تبدیل H_2 با مرکز S در نقطه تلاقی ZY و AM و نسبت $k_2 = 2$ است. ترکیب این تبدیلات متجانس یعنی $H_2 \circ H_1$ عبارت از تبدیل متجانس ومعین H با نسبت تجانس $k = k_1 \cdot k_2 = -2$ است. مرکز این تجانس را بدست می‌آوریم.

بدلیل $H_1(M) = M$، $H(M) = H_2(M) \circ H_1(M) = H_2(M) = A$ است. درنتیجه $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OM}$

خواهد بود. این امر بدین معنی است که O مرکز تلاقی میانه های مثلث ABC است. بدین ترتیب $z \to z$ تبدیلی با مرکز واقع بر محل تلاقی میانه های مثلث ABC و نسبت $k=-2$ است.

شکل ۱۹۷

۳۳۶ ● (a) فرض کنید $ABCD$ متوازی الاضلاع مطلوب محاط در چهارضلعی $LMNK$، O مرکز تقارن متوازی الاضلاع و نقاط B و D بترتیب به MN و KM متعلق باشند (شکل ۱۹۸).

بدلیل $T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ و $T_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$ نقطه C محل تلاقی ML وتصویر KL است.

شکل ۱۹۸

۳۳۷ ● با در نظر گرفتن $BC = a$ و $AC = b$ آنگاه طبق فرض $b < a$ خواهد بود. روش اول. نقطه D متقارن نقطه C را نسبت به نقطه M (میانگاه ضلع AB) مشخص کرده و نقطه D را به رأس A وصل می‌کنیم (شکل ۱۹۹). مثلث ADM با مرکز تقارن M متقارن مثلث BCM است. درنتیجه $AD = BC = a$ و $\angle BCM = \angle ADM = \beta$ خواهد بود. بدین ترتیب در مثلث ACD حاصله که محتوی زوایای α و β است اضلاع متقابل به این زوایا یعنی اضلاع AD و AC بترتیب برابر a و b خواهند بود. طبق فرض $b < a$ و $\beta < \alpha$ است. روش دوم. میانگاه E مربوط به ضلع AC را به نقطه M وصل کرده و مثلث CEM را بدست آورید. اضلاع آن بصورت $EM = \frac{a}{2}$ و $CE = \frac{b}{2}$ است. زوایای مثلث CEM که متقابل به این اضلاع هستند بترتیب برابر α و β است. این امر می‌تواند به آسانی با استفاده از میانخط مثلث ثابت شود.

شکل ۱۹۹

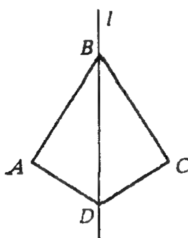
۳۳۸ ● (a) یک رأس روی محور تقارن و دو رأس را در خارج آن اختیار کرده و رئوس متقارن آنها را رسم کنید. (b) پنج ضلعی ای که دارای دو محور تقارن باشد منتظم خواهد بود.

۳۳۹ ● از محور تقارن استفاده کرده و خطی را به خط دیگر انتقال دهید

۳۴۰ • از تقارن نسبت به نیمساز زاویه مقابل به ضلع معین استفاده کنید.

۳۴۱ • بعد از استفاده از تقارن نسبت به عمود منصف وارد بر ضلع سوم مسئله به رسم مثلثی با دوضلع و زاویه بین تحویل می یابد.

۳۴۳ • شکل ۲۰۰ را ملاحظه کنید



شکل ۲۰۰

۳۴۴ • اثبات مسئله را می‌توان از طریق تناقض انجام داد. اگر خط مستقیمی محتوی قطری از پنج ضلعی نقش محور تقارن را ایفاء کند آنگاه فقط وفقط دو رأس پنج ضلعی روی این محور واقع خواهد شد. سه رأس مانده بایستی روی هریک از نیم صفحات با مرز l پخش شوند. ولی برای سه رأس چنین امکانی وجود ندارد. درنتیجه چنین پنج ضلعی ای وجود نخواهد داشت.

۳۴۵ • حل این مسئله مشابه حل مسئله قبلی است.

۳۴۶ • مثلثی کمکی رسم کنید که دوضلع وزاویه بین آنها معلوم بوده و از تقارن نسبت به عمود منصف ضلع سوم استفاده کنید.

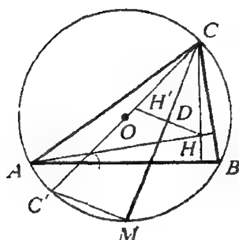
۳۴۷ • راهنمایی مسئله قبل را ملاحظه کنید.

۳۴۸ • (a) یک قطر یکی از دایره ها وقطر دایره دیگر را که متعامد بر آن است رسم کنید. (b) قطر AB را از دایره کوچکتر امتداد دهید تا دایره بزرگتر را در نقطه C قطع کند. محور تقارن پاره‌خط های AC و BC را رسم می‌کنیم.

۳۴۹ • ترکیب تقارن های محوری $S_r \circ S_q \circ S_p$ تقارنی با محور l بوده و $S_r \circ S_q \circ S_p(A) = A$ است. درنتیجه $S_l(A) = A$ بوده و A به l متعلق خواهد بود. خط l را رسم کرده و $\angle(p, q) = \angle(l, r)$ را منظور کنید. هر نقطهٔ خط l می‌تواند نقش A را ایفاء کند.

۳۵۰ • از مرکز دایره سه خط متعامد بر خطوط مفروض رسم کنید. از نتیجه مسئله قبل استفاده کنید.

۳۵۱ • فرض کنید که خط DH خط CO را در نقطه H' قطع کرده و C' انتهای قطری باشد که سر دیگر آن C است (شکل ۲۰۱).



شکل ۲۰۱

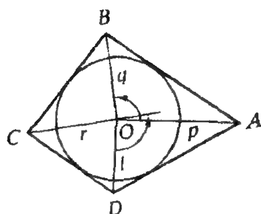
نیمخط های CH و CO نسبت به CM متقارن هستند.

روابط زیر را داریم.

$$CD:CM = CH':CC' = CH:CC' = 2R\cos C:2R = \cos C$$

۳۵۲ • اگر $OM=p$، $ON=q$، $OP=r$ و $OQ=l$ باشد
آنگاه بدلیل $\sigma(0)=0$ و $\sigma(A)=A$، $\sigma=S_l\circ S_r\circ S_q\circ S_p$ یک حرکت همانند خواهد بود.
درنتیجه $S_q\circ S_p=S_r\circ S_l$ یا $\angle(l,r)=\angle(p,q)$ خواهد بود.

۳۵۳ • ترکیب $\delta=S_l\circ S_r\circ S_q\circ S_p$ را مورد ملاحظه قرار دهید که در آن p، q، r و l خطوط محتوی نیمسازهای زوایای چهارضلعی است. بدلیل $\delta(AD)=AD$ و $\delta(0)=0$، δ یک انتقال همانند محسوب می‌شود. $S_q\circ S_p=S_r\circ S_l$ بوده و از اینرو $\angle(l,r)=\angle(p,q)$ را داریم.
درنتیجه $\angle COD+\angle AOB=180°$ (شکل ۲۰۲) خواهد بود.



شکل ۲۰۲

۳۵۶ • قاعده‌های ذوزنقه را با BC و AD ومحور تقارن را با l نشان می‌دهیم. آنگاه $S_l(A)=D$، $S_l(B)=C$ خواهد بود. از اینرو $S_l(AB)=DC$ و $S_p(AB)=DC$ و $S_l(AC)=DB$ را داریم.
ولی نقطه تلاقی خط مستقیم و تصویر آن نسبت به تقارن محوری به محور تقارن تعلق دارد. درنتیجه نقطه تلاقی خطوط AB و DC به l ونقطه تلاقی پاره‌خط های BC و AC نیز به l تعلق خواهد داشت.

۳۵۷ • نقطه O را مرکز دایره، AB و CD را وترهای موازی از این دایره، M را میانگاه وتر AB و N را میانگاه وتر CD درنظر بگیرید. بدلیل $AO=OB$ و $AM=MB$، OM محور تقارن نقاط A و B بوده و از اینجا نتیجه می‌شود که $OM\perp AB$ است. بطریق مشابه ON محور تقارن نقاط C و D بوده و $ON\perp CD$ خواهد بود. با منظور کردن $AB\parallel CD$، $OM\parallel ON$ حاصل شده وبنابرآن $OM=ON$ خواهد بود.

۳۵۸ • O را مرکز دایره F_1 و O_1 را مرکز دایره‌های F_2 و F_3 فرض می‌کنیم. دایره‌های F_1 و F_2 همدیگر را در نقاط A، B و دایره‌های F_1 و F_3 در نقاط C و D همدیگر را قطع می‌کنند. آنگاه OO_1 که دایره‌های F_1 و F_2 و F_3 را قطع می‌کند محور تقارن شکل خواهد بود.

۳۵۹ • نقطه M را نقطه مشترک دایره‌های ω_1 و ω_2 و ω_3 فرض می‌کنیم. نقاط A، B و C، دومین نقاط تقاطع دایره‌های ω_2 و ω_3، ω_3 و ω_1، ω_1 و ω_2 است. ترکیب سه تقارن محوری یعنی S_{MA}، S_{MB} و S_{MC} را که تقارنی با محور MO_2 است مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. O_2 مرکز دایره ω_2 است. اگر نقطه P انتهای قطری از دایره ω_2 باشد که سر دیگر آن نقطه M است آنگاه $S_{MA}(P)=Q$، $S_{MB}(Q)=R$ و $S_{MC}(R)=P$ و $PA=AQ$، $QB=BR$ و $RC=CP$ خواهد بود. درنتیجه AB، BC و CA میانخط های مثلث PQR بوده وبنابراین دایره محیطی مثلث ABC دارای همان شعاع دایره محیطی

مثلث QAB خواهد بود.

۳۶۰ • حل مسئله ۳۵۹ را ملاحظه کنید.

۳۶۱ • نقطه مفروض را با A، خط مفروض را با l نشان می‌دهیم. رابطهٔ $AO\perp l$ را در نظر می‌گیریم. به آسانی می‌توان دریافت که مکان هندسی مطلوب F نسبت به خط AO متقارن بوده و بنابراین کافی است که فقط نیمصفحه واقع در طرف راست AO را مورد ملاحظه قرار دهیم. بدیهی است که نقطه K (K به AO تعلق دارد) با شرط $AK = 2KO$ به مکان هندسی F متعلق خواهد بود. از نقطه K خط m را به موازات خط l رسم می‌کنیم. M را مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABC و بالای خط m، AD را ارتفاع مثلث ABC در نظر می‌گیریم. بدلیل اینکه AOB و ADB زوایای قائمه هستند از اینرو نقاط O و D روی دایره‌ای با قطر AB واقع شده و بدین ترتیب $\angle AOD = \angle ABD = 60°$ خواهد بود. مثلث های AOD و AKM متشابه بوده و از اینرو $\angle AKM = 60°$ است. اگر نقطه M زیر خط m واقع باشد آنگاه بطریق مشابه $\angle AKM = 120°$ خواهد بود. عکس این امر نیز درست است: هر نقطه ای مانند M با شرط اینکه AKM یا مساوی $60°$ و یا مساوی $120°$ است به مکان هندسی F تعلق دارد. سرانجام مکان هندسی F. دو خط مستقیم مار بر نقطه K را نشان می‌دهد که با خط AO زوایای $60°$ و $120°$ و با خط l زوایای $30°$ و $150°$ می‌سازند.

۳۶۲ • A را نقطه مفروض، l را خط مفروض، A' را متقارن نقطه A حول خط l و m را خط مار بر نقطه A' به موازات l در نظر بگیرید. به آسانی دریافت می‌شود که مکان هندسی F نسبت به خط AA' متقارن بوده و از اینرو فقط نیم صفحهٔ واقع در طرف راست AA' را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که C نقطه ای از مکان هندسی F بوده و در بالای خط m واقع باشد. همچنین تصور می‌کنیم که B رأس دوم مثلث ABC است. آنگاه دایره‌ای با شعاع AB و مرکز B ازنقاط A، A' و C می‌گذرد. از اینرو نتیجه می‌شود که $\angle AA'C = 30°$ است. و اگر نقطه C زیر خط m واقع باشد آنگاه $\angle AA'C = 150°$ خواهد بود. همچنین بدیهی است که فقط یک نقطه A' وجود دارد که به مکان F روی خط m متعلق است. بدین ترتیب نقاط مکان هندسی F که در نیم صفحه راست AA' قرار دارند روی دونیم خط ناشی از نقطه A' واقع بوده و با AA' زوایای $30°$ و $150°$ می‌سازند. ثابت کنید که این زوج نیم خط ها واقع در نصفه طرف راست مجموعهٔ نقاط F است. سرانجام مکان هندسی F دو خط مستقیم را ارائه می‌دهد که از نقطه A' با زوایای $30°$ و $150°$ با خط AA' و با زوایای $60°$ و $120°$ با خط مفروض l عبور می‌کنند.

۳۶۳ • نقطه M' متناظر به نقطه M را بعد از دوران حول O به اندازهٔ $90°$ رسم کنید. فاصله نقطه O تا $M'N$ برابر نصف طول ضلع مربع است.

۳۶۴ • تصویر یکی از دایره‌ها را بعد از دوران حول نقطه O به اندازهٔ $60°$ رسم کنید. نقطه تلاقی دایره دوم و دایره رسم شده رأس دوم مثلث مطلوب خواهد بود.

۳۶۵ • وتر مفروض مسئله را رسم کنید. دایره هم مرکز با دایره مفروض را که از نقطه مفروض نیز

می‌گذرد رسم کنید.

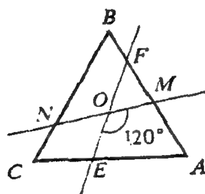
۳۶۶ ● دوران حول مرکز مثلث بـه اندازه $120°$ نقطه M را به N، نقطه N را بـه P و نقطه P را به M انتقال می‌دهد. چنین داریم: $MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

۳۶۷ ● دوران حول مرکز مربع به انـدازه $90°$ نقطه P را به Q، Q را به R، R را بـه S و S را به P انـتقال می‌دهد؛ $PQ=\frac{a\sqrt{10}}{4}$

۳۷۰ ● پـاره‌خط هـای AD و AE را می‌توان بدو طریق جـدا کـرد. دریک حالت شرط مسئله متقاعد نمی‌شـود. در حالت دیگـر دایره ای وجود دارد که از نقاط B، C، D و E می‌گـذرد (مرکز این دایره روی محور تقارن l پروانه $DEABC$ قرار دارد).

۳۷۱ ● فرض کنید که O نـقطـه تلاقی اقطار AC و BD مربع $ABCD$، و MN و KL قطـعـات خطوط مفروض باشند که در داخـل مربع قرار دارند (نقاط M، N، K و L بترتیب به اضلاع AB، CD، BC و AD مربع تعلق دارند). آنـگاه $R_O^{90°}(AB)=AD$ خواهد بود. تصـویر نـقطه M عبارت از نقطهٔ M' از خط AD خواهـد بـود، بطوریکه $\angle MOM'=90°$. یعـنـی ایـن نقطـه هـمـان L خـواهد بـود. بطـریـق مشـابه $R_O^{90°}(N)=K$ بوده و درنتیجه $R_O^{90°}(MN)=KL$ و $MN\equiv KL$ درمی‌آید.

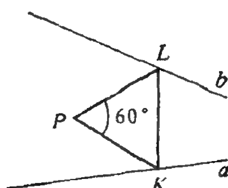
۳۷۲ ● برای اثـبات تسـاوی پاره‌خط ها لازم است حرکـتی پـیدا شود کـه در آن یکـی ازپاره‌خط هـا به دیگری انـتقال می‌یـابد. از آنجـا که زاویه بیـن خطوط محـتوی پاره‌خط های مطـروحه برابر $60°$ است از اینرو دوران حول نقطه O را مورد مـلاحظه قرار می‌دهیم. از آنجـا که دوران حول نقطه O به اندازه $120°$ مثلث را به خـودش انتقال می‌دهد از اینرو مناسب است که دوران حول O به اندازهٔ $120°$ را مورد ملاحظه قرار دهـیم. در ایـن دوران نقطـه A بـه B، B به C، C بـه A، AB به BC، BC بـه CA و CA به AB انتقـال می‌یابد. نقطـه E که به AC مـتعـلق است بـه نقطه M انتقـال می‌یابد که بـه AB متعلق است. (شکل ۲۰۳)؛ نـقطه F متعـلق به AB بـه نقطه N مـتعلق به BC انتقال پـیدا می‌کند ($\angle EOM=120°$ و $\angle FON=120°$). درنتیجه EF نیز به MN منتقل می‌شود. از اینرو $EF=MN$ درمی‌آید.



شکل ۲۰۳

۳۷۳ ● فـرض کـنـیـد که PKL مثلـث مطـلـوب باشد (شکـل ۲۰۴). آنـگـاه نـقاط K و L از نقطه P هم‌فاصله خواهند بود. آنها بترتیـب به خطوط a و b متعلق بـوده و از نقطه P با زاویه $60°$ دیده می‌شـوند. از آنجا کـه نقطه L تصویـر نقطه K به هنگام دوران حـول P به اندازهٔ $60°$ است از اینرو این نـقطه به تصویر خط a در دوران مزبور متعلق خواهد بود (یعنی نقطه L، نقطه مشترک خط $a'=R_P^{60°}(a)$ و خط b است).

نقطه K پیش تصویر نقطه L است. اگر $b=R_P^{60°}(a)$ باشد آنگاه مسئله دارای بینهایت جواب خواهد بود. در بقیه حالت ها مسئله دوجواب بیشتر ندارد زیرا خط b با خط a' و نیز با خط $a''=R_P^{600°}(a)$ از یک نقطه بیشتر، نقطه مشترک ندارد.



شکل ۲۰۴

۳۷۴ ● تعامد دو خط وقتی ثابت می‌شود که یکی از آنها در دوران به اندازهٔ زاویه 90° روی دیگری انتقال یابد. در تجزیه و تحلیل شرایط مسئله توجه داشته باشید که نقاط M و B از نقطه A هم فاصله بوده و $\angle MAB=90°$ است. بطریق مشابه $AC=AP$ و $\angle CAP=90°$ است. از اینرو دوران به اندازهٔ زاویه 90° درجهت عقربه های ساعت حول نقطه A نقطه M را به نقطه B و نقطه C را به نقطه P انتقال می‌دهد.

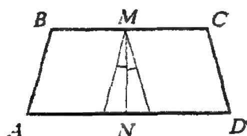
۳۷۵ ● دوران صفحه به اندازهٔ زاویه 90° و حول نقطه M را مورد ملاحظه قرار دهید.

۳۷۶ ● ترکیب دو دوران $R_D^{90°}$ و $R_E^{270°}$ را مورد ملاحظه قرار دهید. انتقال $T_{\overrightarrow{AC}}$ را در نظر بگیرید که در آن نقطه D به F منتقل می‌شود و $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AC}$ است. ولی $\angle FDE=45$ بوده و از اینروزاویه مطلوب برابر 45° خواهد بود.

۳۷۸ ● فرض کنید که $B'=T_{\overrightarrow{CD}}(B)$ و E میانگاه پاره‌خط AB' است. از نقاط A ، B ، C و D خطوطی به موازات BE رسم کنید.

۳۷۹ ● رابطه $BC \parallel AD$ را در نظر بگیرید. تصویر قطر AC را در انتقال $T_{\overrightarrow{AD}}$ مورد ملاحظه قرار دهید.

۳۸۰ ● رابطه $BC \parallel AD$ را فرض کرده و تصاویر پاره‌خط های AB و CD را در انتقال های $T_{\overrightarrow{BM}}$ و



شکل ۲۰۵

$T_{\overrightarrow{CM}}$ مورد ملاحظه قرار دهید. ثابت کنید که نیمساز زاویه مثلث حاصله در همان حال میانه نیز هست (شکل ۲۰۵).

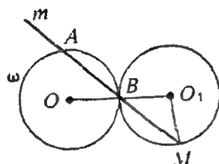
۳۸۱ ● انتقال $T_{\overrightarrow{AC}}$ را در نظر بگیرید. نقطه L متناظر به نقطه K را رسم کرده و درمی‌یابیم که: $AK \parallel CL$ ، $\angle KCL=90°$. درنتیجه $\angle AKC=90°$ خواهد بود.

۳۸۲ ● یکی از اضلاع جانبی ذوزنقه را به داخل آن انتقال دهید.

۳۸۳ ● توجه داشته باشید که مجموع فواصل رئوس متقابل متوازی الاضلاع $OABC$ از هر خط

مستقیمی برابر است، زیرا این مجموع ها مساوی دو برابر فاصله نقطه تلاقی اقطار متوازی الاضلاع از خط مزبور می‌باشد.

۳۸۴ ● دایره کمکی رسم کنید که مساوی دایره مفروض و مماس بر آن بوده و از نقطه M بگذرد (شکل ۲۰۶). به تساوی های $MO_1 = R$ و $OO_1 = 2R$ توجه کنید.



شکل ۲۰۶

۳۸۶ ● AD و BC را قاعده های ذوزنقه $ABCD$، M را میانگاه پاره‌خط BC و N را میانگاه پاره‌خط AD در نظر بگیرید. در انتقال $T_{\overrightarrow{BM}}$ نقطه B به نقطه M و نقطه A به نقطه A_1 منتقل می‌شود.

در انتقال $T_{\overrightarrow{CM}}$ نقطه C به نقطه M و نقطه D به نقطه D_1 منتقل می‌گردد. آنگاه داریم:

$$A_1N = AN - AA_1 = AN - BM \qquad (1)$$
$$ND_1 = ND - D_1D = ND - MC \qquad (2)$$

با تجمیع تساوی های (1) و (2) به $A_1N + ND_1 = AN + ND - (BM + MC) = AD - BC$ وصول می یابیم. ولی $A_1N + ND_1 = A_1D_1$ بوده و از اینرو $A_1D_1 = AD - BC \qquad (3)$ حاصل می‌شود. بدلیل $A_1N = ND_1$، MN میانه مثلث قائم الزاویه A_1MD_1 است.

بدین ترتیب $MN = \frac{1}{2}A_1N + ND_1$ خواهد بود. با در نظر گرفتن تساوی (3) درمی یابیم که:

$$MN = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}(AD - BC)$$

۳۸۷ ● رئوس ذوزنقه را با A، B، C و D نشان می‌دهیم ($AC = 13\ \text{cm}$، $BD = 20\ \text{cm}$ و $AD + BC = 21\ \text{cm}$). آنگه $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)h$ خواهد بود که در آن h ارتفاع ذوزنقه است.

انتقال $T_{\overrightarrow{BC}}$ را مورد ملاحظه قرار دهید.

این انتقال نقطه B را به نقطه C، و نقطه D را به نقطه D' منتقل می‌سازد. مساحت مثلث ACD' برابر $\frac{1}{2}AD'h$ بوده و $AD' = AD + DD' = AD + BC$ است.

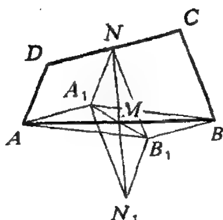
بنابراین مساحت ذوزنقه $ABCD$ نیز برابر مساحت مثلث ACD' خواهد بود.

۳۸۸ ● اگر مراکز دایره های مفروض را با O_1 و O_2 نشان دهیم آنگاه انتقال $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$ دایره با مرکز O_1 را به دایره‌ای با مرکز O_2 منتقل می‌سازد. در این انتقال نقطه A به نقطه C و نقطه B به نقطه D می‌رود. درنتیجه $AC = BD = O_1O_2 = d$ خواهد بود.

۳۸۹ ● فرض کنید که چهارضلعی مطلوب $ABCD$ رسم شده باشد (شکل ۲۰۷). انتقال $T_{\overrightarrow{DN}}$ را روی ضلع DA و انتقال $T_{\overrightarrow{CN}}$ را روی ضلع CB انجام می‌دهیم. در این حالت از نقطه N سه پاره‌خط

NA_1، NM و NB_1 ناشی می‌شود که طول آنها معلوم است. به آسانی می‌توان نشان داد که M میانگاه پاره‌خط A_1B_1 است. در حقیقت طول پاره‌خط های AA_1 و BB_1 برابر $\frac{1}{2}DC$ بوده و این پاره‌خط های موازی DC هستند. بدین ترتیب چهارضلعی A_1AB_1B متوازی الاضلاع خواهد بود. نقطه M میانگاه قطر AB بوده و از اینرو M به قطر A_1B_1 متعلق بوده و میانگاه آن محسوب می‌شود. بدین ترتیب در مثلث NA_1B_1 اضلاع NA_1 ، NB_1 و میانه محصور بین آنها معلوم هستند. برای رسم این مثلث نقطه N_1 را که متقارن N نسبت به مرکز تقارن M است مشخص می‌کنیم. بدیهی است که $A_1N_1=NB_1$ است. مثلث NN_1A_1 را می‌توان با سه ضلع معلوم یعنی $NA_1 = DA$ ، $A_1N_1 = NB_1 = CB$ و $NN_1 = 2NM$ رسم کرد. حال چهارضلعی مطلوب را رسم می‌کنیم.

پاره‌خط NN_1 را بوسیله نقطه M به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. با مرکز تقارن M، نقطه B_1 را متقارن نقطه A_1 رسم می‌کنیم. مثلث های A_1MA و B_1MB را بوسیلهٔ سه ضلع معلوم رسم می‌کنیم. با انتقال پاره‌خط AA_1 بوسیلهٔ $T_{\overrightarrow{A_1N}}$ و پاره‌خط BB_1 بوسیله $T_{\overrightarrow{B_1N}}$ چهار رأس چهارضلعی مطلوب $ABCD$ بدست می‌آید. به آسانی می‌توان ثابت کرد
جواب منحصر بفرد است.



شکل ۲۰۷

۳۹۱ ● حالت کلی را در نظر بگیرید: مثلث ABC متساوی الاضلاع بوده و از اینرو نقاط O ، H و M متمایز هستند. تبدیل متجانس با مرکز M و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ انتقال می‌دهد که رئوس آن میانگاه اضلاع مثلث مفروض است. اضلاع متناظر این مثلث ها موازی هستند. ارتفاعات AA_1 ، BB_1 و CC_1 از مثلث $\triangle ABC$ به ارتفاعات $A'A_1$، $B'B_1$ و $C'C_1$ از مثلث $\triangle A'B'C'$ انتقال یافته و ارتفاعات مثلث $A'B'C'$ بر اضلاع ABC عمود می‌باشند. از اینرو در تبدیل متجانس ارائه شده نقطه H محل تلاقی ارتفاعات مثلث به مرکز O دایره محیطی مثلث ABC منتقل می‌شود. از اینرو نتیجه می‌شود که نقاط M ، H و O روی یک خط مستقیم واقع بوده و $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$ است که از آن نیز $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$ استنتاج می‌شود. اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد آنگاه $H = M = O$ بوده و خط اولر مبهم خواهد بود.

۳۹۲ ● KD پاره‌خط مطلوب است؛ یعنی $KM:MD = 1:2$ را داریم (شکل ۲۰۸).
آنگاه تبدیل متجانس $H_M^{-\frac{1}{2}}$ نقطه D را به نقطه K انتقال می‌دهد. بدلیل تعلق D به BC ، نقطه K به $B'C'$ متعلق بوده و $B'C' = H_M^{-\frac{1}{2}}(BC)$ است. درنتیجه K نقطه تلاقی BA و $B'C'$ خواهد

بود. در رسم نقطه K روی BC نقطه D را بیابید که پیش تصویر نقطه K در تبدیل متجانس $H_M^{-\frac{1}{2}}$ است.

شکل ۲۰۸

۳۹۳ • دو دایره O_1 و O_2 که بر هم در نقطه M مماس هستند نسبت به این نقطه متجانس می‌باشند. تبدیل متجانسی را مورد ملاحظه قرار دهید که R را به S انتقال می‌دهد. این تبدیل نقطه A را به نقطه C (شکل ۲۰۹) و نقطه B را به نقطه D منتقل می‌سازد. با استفاده از ویژگی های تجانس $AB \parallel CD$ بدست می‌آید.

شکل ۲۰۹

۳۹۴ • فرض کنید M نقطه تماس دایره ω به مرکز O و شعاع r با دایره ω_1 به مرکز O_1 و شعاع r_1 بوده و a قاطعی باشد که دایره ها را در نقاط A و A_1 قطع می‌کند (شکل ۲۱۰). اثبات $O_1A_1 \parallel OA$ مطلوب مسئله است. تبدیل متجانس H_M را در نظر بگیرید که نقطه O را به نقطه O_1 منتقل می‌سازد. در این تبدیل متجانس خط a به خودش منتقل می‌شود زیرا از مرکز تبدیل می‌گذرد. این تبدیل دایره ω را به دایره ω_1 انتقال می‌دهد. نقطه A که محل تلاقی a و ω است به نقطه تلاقی a و ω_1 انتقال می یابد. این نقطه متفاوت با M بوده و از اینرو روی A_1 قرار می‌گیرد. از آنجا که O_1A_1 تصویر پاره‌خط OA در تبدیل متجانس است از اینرو این پاره‌خط ها موازی خواهند بود.

شکل ۲۱۰

۳۹۵ • نقطه تلاقی خطوط MP و NQ را با X، نقطه تلاقی خطوط مستقیم MR و NS را با Y و نقطه تلاقی خطوط PR و QS را با Z نشان می‌دهیم. به آسانی استنباط می‌شود که ترکیب تبدیلات متجانس $H_X^{(M,P)}$ و $H_Z^{(P,R)}$ عبارت از تبدیل متجانس $H_Y^{(M,R)}$ است. $H_X^{(M,P)}$ تبدیل متجانسی با مرکز X را نشان می‌دهد که نقطه M را به نقطه P انتقال می‌دهد. اگر ترکیب دو تبدیل متجانس یک تبدیل

متجانس باشد آنگاه مراکز همهٔ سه تبدیل متجانس روی یک خط واقع بوده و Y به ZX متعلق خواهد بود. دومین قسمت نیز بطریق مشابه حل می‌شود.

۳۹۶ ● تبدیل متجانس H_A را مورد ملاحظه قرار دهید که دایره ω را به ω_1 انتقال می‌دهد. در این حالت نقاط M و N به نقاط N_1 و P_1 (N_1 نقطه تلاقی دایره ω و خط AN، و P_1 نقطه تلاقی دایره ω و خط AP است) انتقال می‌یابند. آنگاه خط N_1P_1 به عنوان تصویر خط VP موازی آن در تبدیل متجانس خواهد بود. براساس توازی خطوط MQ و M_1P_1، کمانهای MN_1 و QP_1 برابر بوده و از اینرو زوایای محاطی متناظر به آنها یعنی زوایای MAN_1 و QAP_1 نیز برابر خواهند بود؛ یعنی $\angle QAP = \angle MAN$ را خواهیم داشت.

۳۹۷ ● فرض کنید که M نقطه انتهایی مشترک پاره‌خط ها، و A_1، A_2، A_3، ..... نقاط انتهای دیگر پاره‌خط ها باشند که روی یک قرار دارند. M_1، M_2، M_3 و ..... را نقاطی روی پاره‌خط های MA_1، MA_2، MA_3 و ..... درنظر بگیرید که آنها را به نسبت λ تقسیم می‌کنند؛ یعنی:

$$\frac{A_1M_1}{M_1M}=\frac{A_2M_2}{M_2M}=\frac{A_3M_3}{M_3M}=\cdots=\lambda$$

ثابت کنید که

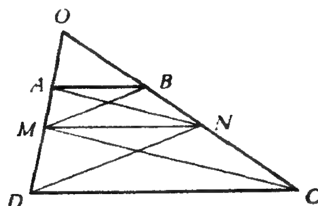
$$\frac{MM_1}{MA_1}=\frac{MM_2}{MA_2}=\frac{MM_3}{MA_3}=\cdots=\frac{MA_1}{MM_1}=\frac{MM_1+M_1A_1}{MM_1}=1+\frac{M_1A_1}{MM_1}=1+\lambda$$

بوده و آنگاه $\frac{MM_1}{MA_1}=\frac{1}{1+\lambda}$ است. بطریق مشابه داریم: $\frac{MM_2}{MA_2}=\frac{1}{1+\lambda}$ وغیره.

تبدیلات $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}$، $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}(A_1)=M_1$، $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}(A_2)=M_2$ وغیره را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

با منظور کردن اینکه تصویر یک خط مستقیم در یک تبدیل متجانس خط مستقیم است، درمی‌یابیم که نقاط M_1، M_2، M_3 وغیره به یک خط مستقیم تعلق دارند.

413 ● اگر نقطه تلاقی DA و CB را نقطه O فرض کنیم (شکل ۲۱۱)، آنگاه $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OB}$ خواهد بود. طبق فرض $AN\|CM$ بوده و از اینرو $\overrightarrow{OM}=\beta\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{ON}=\beta\overrightarrow{OC}$ را داریم. درنتیجه $\overrightarrow{OD} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}=\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{OB}$ حاصل می‌شود. بنابراین $DN\|MB$ استنتاج می‌گردد.



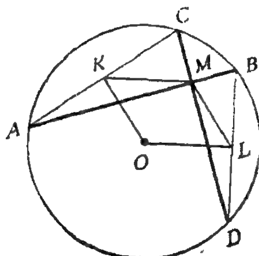
شکل ۲۱۱

۴۱۵ ● K میانگاه وتر AC بوده و از اینرو $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ را داریم (شکل ۲۱۲). نقطه L میانگاه

وتر BD است و بنابرآن $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$ و $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ را داریم.

از اینرو $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ بوده و بدین ترتیب $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LM}$ استنباط می‌شود.

بنابراین چهار ضلعی $OKML$ متوازی الاضلاع خواهد بود.



شکل ۲۱۲

۴۱۶ ● اگر CC_1 میانه مثلث ABC فرض شود آنگاه $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ و $|\overrightarrow{CC_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$ خواهد بود. بدلیل ناهمخط بودن $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$، $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}| < |\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|$ است.

از اینرو $CC_1 < \frac{1}{2}(CA+CB)$ استنتاج می‌شود.

۴۱۷ ● می‌دانیم که $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ است. از اینرو $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ بوده و O نقطه دلخواهی از صفحه است. چون $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ بردارهای ناهمخط هستند، داریم:

$$|\overrightarrow{OM}| < \frac{1}{3}(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|)$$

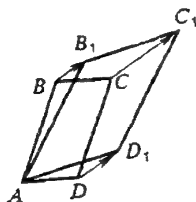
از اینرو $OM < \frac{1}{3}(OA+OB+OC)$ حاصل می‌شود.

۴۱۸ ● طبق فرض $ABCD$ و $AB_1C_1D_1$ متوازی الاضلاع بوده و بنابرآن داریم (شکل ۲۱۳).

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

با تفریق تساوی برداری دوم از تساوی اول $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AD}$ حاصل می‌شود.

درنتیجه $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1}$ استنتاج می‌شود که از آن نیز $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$ بدست می‌آید.



شکل ۲۱۳

۴۱۹ ● اگر A_0، B_0، C_0 و D_0 بترتیب میانگاه پاره‌خط های AA_1، BB_1، CC_1 باشند.

(شکل ۲۱۴a) آنگاه به ازاء نقطه دلخواه O در صفحه داریم:

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA_1}) \qquad \overrightarrow{OB_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_1}) \qquad \overrightarrow{OC_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC_1}).$$

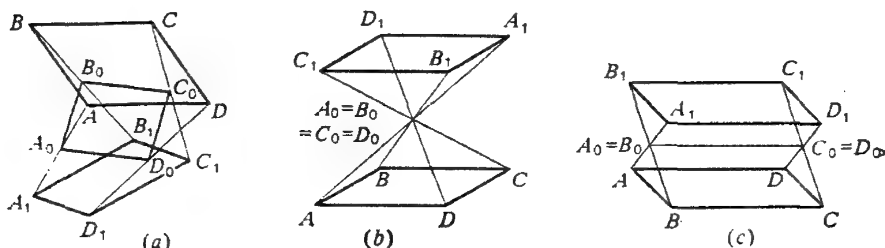
$$\overrightarrow{OD_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD_1})$$

از اینرو روابط زیر بدست می‌آید.

$$\overrightarrow{A_0B_0}=\overrightarrow{OB_0}-\overrightarrow{OA_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}),$$

$$\overrightarrow{D_0C_0}=\overrightarrow{OC_0}-\overrightarrow{OD_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OD_1})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{D_1C_1}).$$

طبق فرض $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ متوازی الاضلاع بوده و از اینرو $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ است. در نتیجه $\overrightarrow{A_0B_0}=\overrightarrow{D_0C_0}$ بوده و چهارضلعی $A_0B_0C_0D_0$ متوازی الاضلاع خواهد بود. حالت های خاص مسئله در اشکال ۲۱٤b و ۲۱٤c نشان داده شده اند.



شکل ۲۱٤

٤۲۰ ● فرض کنید که $k=\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}$ بوده و O نقطه دلخواهی در صفحه باشد. داریم: $k=\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$، که از آن نیز $k=\frac{\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}}$ بدست آمده و از اینرو $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}}{k+1}$ را خواهیم داشت.

بطریق مشابه $\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{OD}}{k+1}$ ، $\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}}{k+1}$ و $\overrightarrow{OS}=\frac{\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OA}}{k+1}$ حاصل می‌شود.

به آسانی استنباط می‌شود که $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ است. درحقیقت داریم:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k+1}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{k}{k+1}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS}=\frac{1}{k+1}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})+\frac{k}{k+1}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{DC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AD}$$

ولی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ بوده و بنابرآن $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ خواهد بود. درنتیجه $PQRS$ یک متوازی الاضلاع خواهد بود.

٤۲۱ ● نقاط تلاقی میانه های مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ را با G و G_1 نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که: $AG\|B_1C_1$ ، $BG\|A_1C_1$ و $CG\|A_1B_1$.

آنگاه طبق فرض $\overrightarrow{GB}=\mu(\overrightarrow{G_1C_1}-\overrightarrow{G_1A_1})$ ، $\overrightarrow{GA}=\lambda(\overrightarrow{G_1B_1}-\overrightarrow{G_1C_1})$ و $\overrightarrow{GC}=\gamma(\overrightarrow{G_1A_1}-\overrightarrow{G_1B_1})$ خواهد بود. با تجمیع طرفین این تساوی ها چنین حاصل می‌شود:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{G_1A_1}(\gamma-\mu)+\overrightarrow{G_1B_1}(\lambda-\gamma)+\overrightarrow{G_1C_1}(\mu-\lambda)$$

ولی $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$ بوده و از اینرو داریم: $\overrightarrow{G_1A_1}(\gamma-\mu)+\overrightarrow{G_1B_1}(\lambda-\gamma)+\overrightarrow{G_1C_1}(\mu-\lambda)=0$.

از طرف دیگر نیز $\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_1C_1}=0$ در دسترس قرار می‌گیرد.

از اینرو به $\mu=\gamma=\lambda$ وصول می‌یابیم. بدین ترتیب

$$\frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})=\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}-2\overrightarrow{G_1C_1}=3(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1})=-3\overrightarrow{G_1C_1}$$

حاصل می‌شود. یعنی رابطه $\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{G_1C_1}$ بدست می‌آید که از آن نیز $BA \| G_1C_1$ استنتاج می‌شود.

۴۲۲ ● فرض می‌کنیم که A_1، B_1، C_1 و D_1 بترتیب نقاط تلاقی میانه های مثلث های BCD، CDA، DAB و ABC باشد. داریم:

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \text{ و } \overrightarrow{OD_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \qquad (1)$$

اگر M و M_1 محل تلاقی میانخط های چهارضلعی های $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ باشد آنگاه

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

خواهد بود. با منظورکردن تساوی (1) رابطه $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ بدست می‌آیدکه $M_1=M$ را ثابت می‌کند.

۴۲۳ ● فرض کنید که R میانگاه ML بوده و $d \| OR$ باشد (شکل ۲۱۵). به عنوان مثال ثابت می‌کنیم که در این حالت $c \| OE$ است. E میانگاه NP می‌باشد.

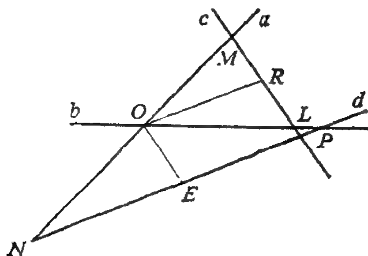
آنگاه $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OL},\ \overrightarrow{ON}=n\overrightarrow{OM}$ و $NP \| OR$ یعنی $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=k(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL})$ خواهد بود. جاگذاری مقادیر $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{ON}$ درتساوی اخیر به $m\overrightarrow{OL}-n\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM}+k\overrightarrow{OL}$ یعنی $(m-k)\overrightarrow{OL}=(k+n)\overrightarrow{OM}$ منجر می‌شود. از آنجا که بردارهای $\overrightarrow{OL}$ و $\overrightarrow{OM}$ ناهمخط هستند $m-k=0$، و $k+n=0$ خواهد بود.

یعنی $m=k$ و $n=-k$ حاصل می‌شود. آنگاه $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OL}$ و $\overrightarrow{ON}=-k\overrightarrow{OM}$ استنتاج می‌گردد.

بردار $(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP})$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که با

$$\overrightarrow{OE}.\ \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=-k\overrightarrow{OM}+k\overrightarrow{OL}=k(\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM})=k\overrightarrow{ML}$$

همخط است. درنتیجه $OE \| ML$ خواهد بود. بطریق مشابه می‌توان ویژگی مطروحه را در مورد خطوط دیگر نیز ثابت کرد.



شکل ۲۱۵

۴۲۴ ● فرض کنید که خطوط m_1 و l_1 در نقطه K همدیگر را قطع کنند (شکل ۲۱۶). ثابت کنید که $\overrightarrow{KC_0} \| n$ است. داریم:

$\overrightarrow{KC_0}=\overrightarrow{SC_0}-\overrightarrow{SK},\ \overrightarrow{SC_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{SK}=\overrightarrow{SA_0}+\overrightarrow{A_0B_0}+\overrightarrow{B_0K}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+m\overrightarrow{SB}=m\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$

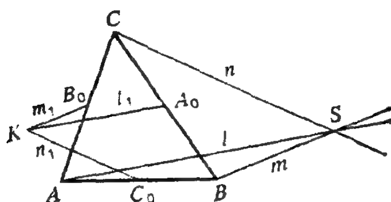
از طرف دیگر نیز رابطهٔ زیر را داریم:

$\overrightarrow{SK}=\overrightarrow{SB_0}+\overrightarrow{B_0A_0}+\overrightarrow{A_0K}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+n\overrightarrow{SA}=n\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$

آنگاه $m\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=n\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ یا $m\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}=n\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$ حاصل می‌شود که از آن نیز $m=\frac{1}{2}$ یا $n=\frac{1}{2}$ استنتاج می‌شود. بدین ترتیب داریم:

$\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$

آنگاه $\overrightarrow{KC_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ ودرنتیجه $KC_0 \| SC$ حاصل می‌شود. یعنی خط n_1 از نقطه تلاقی خطوط l_1 و m_1 می‌گذرد.



شکل ۲۱۶

۴۲۵ ● به راه‌حل مسئله ۴۲۴ مراجعه کنید.

۴۲۶ ● ابتدا ثابت کنید که در دوچهارضلعی رابطه $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA})$ که در آن M و N بترتیب میانگاه اضلاع CB و DA هستند و $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$ برقرار می‌باشد. با تجمیع این تساویها و منظور کردن $\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{AN}=0$ و $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}=0$ به $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA})$ وصول می یابیم. اگر بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ ناهمخط باشند آنگاه $MN<\frac{1}{2}(CD+BA)$ بدست می‌آید. درنتیجه $CD \| BA$ بوده وچهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع یا ذوزنقه خواهد بود.

۴۲۷ ● چنین داریم: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$. بدین ترتیب

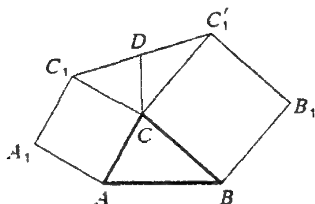
$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}=0$

حاصل می‌شود. اگر O نقطه تلاقی میانه های مثلث ABC باشد آنگاه $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ بوده و در نتیجه $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=0$ خواهد بود.

از اینرو نتیجه می‌شود که O محل تلاقی میانه های مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۴۲۸ ● داریم: $\overrightarrow{CA_2}=\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AC}$. در دوران با زاویه $90°$، $\overrightarrow{A_2A}$ به $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AC}$ به $\overrightarrow{BB_2}$ انتقال می یابد؛ یعنی $\overrightarrow{CA_2}$ به $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{CB_2}$ منتقل می‌شود که از آن نیز $CA_2 \perp CB_2$ و $CA_2=CB_2$ استنتاج می‌گردد.

۴۲۹ • فرض کنید که D میانگاه $C_1C'_1$ (شکل ۲۱۷) بوده و $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC'_1})$ باشد. در دوران به اندازه زاویه 90° بردارهای $\overrightarrow{CC_1}$ و $\overrightarrow{CC'_1}$ بترتیب به بردارهای $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ـ منتقل می‌شوند. در نتیجه این دوران مجموع برداری $\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC'_1}$ را به بردار $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ یعنی به بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهد. بدین ترتیب $\overrightarrow{BA}\perp(\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC'_1})$ و $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC'_1}|$ بوده و از اینجا حکم مسئله اثبات می‌گردد.

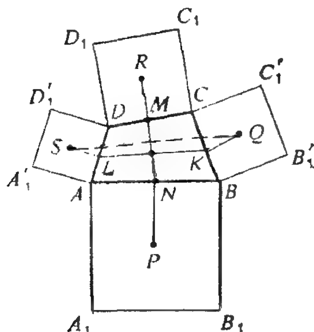


شکل ۲۱۷

۴۳۰ • ثابت کنید بردار $\overrightarrow{PR}$ با دوران بردار $\overrightarrow{SQ}$ با زاویه 90° بدست می‌آید (شکل ۲۱۸). چنین داریم: $\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{SL}+\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KQ}$ یا $\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{SL}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{KQ}$. اگرهر یک از بردارهای واقع در طرف راست تساوی آخر را به اندازهٔ 90° دوران دهیم آنگاه $\overrightarrow{SL}$ به $\overrightarrow{LD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$، $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ به $\overrightarrow{MR}$، $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ به $\overrightarrow{PN}$ و $\overrightarrow{KQ}$ به $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ منتقل می‌شود. و آنگاه $\overrightarrow{SQ}$ نیز به

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{PN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PN}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{PR}$$

انتقال می‌یابد. از اینرو $\overrightarrow{PR}$ با دوران $\overrightarrow{SQ}$ به اندازهٔ 90° بدست می‌آید. درنتیجه $PR\perp SQ$ و $PR=SQ$ خواهد بود.



شکل ۲۱۸

۴۳۱ • بدلیل

$$\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}=-\frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2}\text{ ، }\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=0\text{ یعنی }\overrightarrow{MD}=-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$$

را داریم. آنگاه $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MD}$ یعنی $\overrightarrow{V}=-\overrightarrow{MD}$ حاصل می‌شود. این امر بدین معنی است که M میانگاه پاره‌خط DV است. مساحت چهارضلعی $MAUV$ را به دو طریق بیان می‌کنیم:

(a) $S_{MAUV}=S_{MAV}+S_{MUV}=S_{MAB}+S_{MCD}$

$(b)\ S_{MAUV}=S_{MAV}+S_{UAV}=S_{MAD}+S_{MBC}$

از اینرو $2S_{MAUV}=S_{MAB}+S_{MCD}+S_{MAD}+S_{MBC}=S_{ABCD}$ بوده و درنتیجه $S_{ABCD}:S_{MAUV}=2$ حاصل می‌شود.

۴۳۲ ● اگر AL و BK میانه های مثلث ABC ، و M نقطه تلاقی AL و BK باشد آنگاه

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

را خواهیم داشت. از این گذشته

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{ML} \qquad (2)$$

را داریم. از تساوی های (1) و (2) نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ بوده و از اینرو $2\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{AB}$ است. ولی $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ بوده و بنابرآن $2\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$ یا

$$(\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{ML})+(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{KM})=0$$

را داریم. بردارهای $\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{ML}$ و $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{KM}$ بترتیب با بردارهای $\overrightarrow{AL}$ و $\overrightarrow{BK}$ همخط هستند. از اینرو $\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{ML}=0$ و $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{KM}=0$ یعنی $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{ML}$ و $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{KM}$ را داریم. بنابراین $\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|}=2$ و $\frac{|\overrightarrow{ML}|}{|\overrightarrow{KM}|}=2$ استنتاج می‌گردد.

۴۳۳ ● قبل از همه ثابت کنید که نقاط M ، N و B به یک خط تعلق دارند. برای این کار ثابت کنید که بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{NB}$ همخط هستند. چنین داریم:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}, \qquad \overrightarrow{MA}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}, \qquad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{30}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{30}(5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})$$

$$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{NB}=\frac{1}{6}(5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})$$

از اینرو $\overrightarrow{NB}=5\overrightarrow{MN}$ بوده و درنتیجه بردارهای $\overrightarrow{NB}$ و $\overrightarrow{MN}$ همخط خواهند بود. نقطه N پاره‌خط MB را به نسبت $1:5$ تقسیم می‌کند.

۴۳۴ ● به زبان برداری مطلوب مسئله این است که $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$ ثابت شود. در این رابطه O محل تلاقی پاره‌خط هایی است که نقاط انتهایی آنها میانگاه اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCD$ ، و M و N میانگاه اقطار BD و AC است. چنین داریم: $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PO}$ و $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$. از اینرو

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{PO} \qquad (1)$$

حاصل می‌شود. از این گذشته $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RN}$ ، $\overrightarrow{RN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ بوده و درنتیجه

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OR} \qquad (2)$$

استنتاج می‌شود.

با مقایسه تساوی های (1) و (2) و با یادآوری $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{OR}$ به $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$ وصول می یابیم.

۴۳۵ ● اگر پاره خط های A_1A_2 و B_1B_2 روی خطوط موازی با l_1 واقع شوند آنگاه در حالت $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$ بینهایت جواب وجود خواهد داشت. یعنی کافی است که روی خط مستقیم هر پاره خطی مانند C_1C_2 را طوری اختیار کنیم که $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_1A_2}$ باشد. و اگر پاره خط های مفروض طوری باشند که $\overrightarrow{A_1A_2}\neq\overrightarrow{B_1B_2}$ برقرار شود آنگاه نقاط مطلوب C_1 و C_2 موجود نخواهند بود. حال برای قاطعیت فرض کنید که A_1A_2 موازی l نبوده و A_3 نقطه تلاقی خطوط A_1A_2 و l_1 باشد.

روی خط B_1B_2 دو نقطه M_1 و M_2 را طوری مشخص کنید که $B_1B_2:B_2M=A_2A_1:A_2A_3$ باشد و نقطه B_3 را با شرط زیر رسم کنید:

اگر A_1 بین دو نقطه دیگر روی خط A_1A_2 واقع شود آنگاه B_1 بین دو نقطه دیگر در خط B_1B_2 واقع خواهد بود. حال نقاط B_3 و A_3 را بهم متصل کرده و از نقاط B_1 و B_2 خطوطی به موازات A_3B_3 رسم کنید.
نقاط تلاقی آنها را با خط l C_1 و C_2 می‌نامیم.

درحقیقت $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2}=\frac{C_1C_2}{C_2A_3}$ را داریم که از آن نیز $\frac{A_1A_3}{A_2A_3}=\frac{C_1A_3}{C_2A_3}$ استنتاج می‌شود.
آنگاه زوایای $A_1C_1A_3$ و $A_2C_2A_3$ به عنوان زوایای متناظر از مثلث های مشابه $A_1C_1A_3$ و $A_2C_2A_3$ برابر بوده و $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ درمی‌آید.

۴۳۶ ● در حل این مسئله از روش برداری استفاده می‌کنیم (شکل ۲۱۹). طبق ویژگی مجموع بردارها $\overrightarrow{A_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{B_1C_2}+\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{C_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_1}=0$ را داریم.

با استفاده از ویژگی های شرکت‌پذیری و جابجایی در جمع بردارها چنین حاصل می‌شود.

$\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{A_2A_1}+(\overrightarrow{A_1B_2}+\overrightarrow{B_1C_2}+\overrightarrow{C_1A_2})=0$

بدلیل $\overrightarrow{B_1C_2}=\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{A_1B_2}=\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{C_1A_2}=\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ مجموع بردارهای واقع در داخل پرانتز نیز برابر صفر خواهد بود.

بدین ترتیب $\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{A_2A_1}=0$ بوده و آنگاه $\overrightarrow{B_2B_1}=\overrightarrow{C_1C_2}-\overrightarrow{A_2A_1}$ حاصل می‌شود.

روشن است که هرسه بردار مفروض را می‌توان برحسب تفاضل دو بردار دیگر ارائه داد.

اگر بردارها ناهمخط باشند آنگاه مثلث مطلوب موجود خواهد بود. ولی دو بردار از سه بردار مفروض نمی‌توانند همخط باشند زیرا در اینصورت بردار سوم نیز با آنها همخط خواهد بود. اگر رأس سوم A_1 با هر نقطه ای از خط موازی C_1C_2 نشان داده شود آنگاه چنین حاصل می‌شود (شکل ۲۲۰):

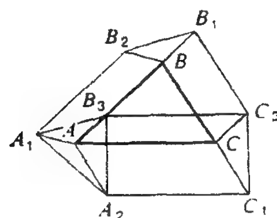
$\overrightarrow{B_2B_1}=\overrightarrow{B_2B}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{CC_2}=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A})+(\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1C_2})=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2})+(\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{CC_1})=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}$

بدین ترتیب $\overrightarrow{B_2B_1}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}$ بوده و مثلث مطلوب موجود نخواهد بود.

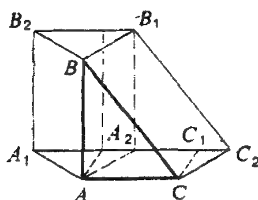
بنابراین رسم این مثلث در صورتی ممکن می‌شود که بردارهای متناظر به پاره‌خط های مفروض، ناهمخط باشند. راه حل مسئله قبل را با استفاده از تبدیل مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که $\overrightarrow{B_1B_2}$، $\overrightarrow{C_1C_2}$ و $\overrightarrow{A_1A_2}$ بردارهای ناهمخط باشند.

با تبدیل $T_{\overrightarrow{CA}}$ مثلث CC_1C_2 را انتقال می‌دهیم (شکل ۲۲۱). آنگاه CC_2 به AB_3، CC_1 به AA_2، و C_1C_2 به A_2B_3 منتقل می‌شود. درحقیقت داریم: $BB_1 \parallel CC_2$ و $BB_1 = CC_2$، $AB_2 \parallel B_2B_1$ و $AB_2 = B_2B_1$.
آنگاه چنین حاصل می‌شود: $CC_2 \parallel AB_3$ و $CC_2 = AB_3$.

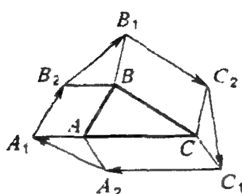
و درنتیجه C_1C_2 به A_2B_3 منتقل می‌شود. سرانجام در تبدیل $T_{\overrightarrow{BA}}$ در مورد مثلث BB_1B_2 چنین حاصل می‌شود: B_2 به A_1، B_1 به B_2، C_2 به B_3، C_1 به A_2 انتقال می‌یابد. بدین ترتیب اضلاع مثلث $A_1B_3A_2$ با پاره‌خط های B_2B_1، C_2C_1 و A_2A_1 برابر خواهد شد.



شکل ۲۲۱



شکل ۲۲۰



شکل ۲۱۹

۵۴۳ ● (a) $2\sqrt{\frac{2S}{\sin\beta}}$؛ (b) $2\sqrt{S\tan\frac{\beta}{2}}$؛ (c) $2\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{2S}{\sin\beta}}$

۵۴۴ ● $\arccos\frac{4}{5}$.　　　۵۴۵ ● $b+\frac{c}{2}$

۵۴۶ ● کوچکترین مقدار مطلوب برابر h_c و بزرگترین مقدار برابر h_a است.

۵۴۷ ● قطر مستطیل ارتفاع مثلث است.

۵۴۸ ● $4\sqrt{2}$ m　　　۵۴۹ ● 30 cm　　　۵۵۰ ● (a) 6000 cm^2؛ (b) 108 cm^2،

۵۵۱ ● $KD=MD=5$ cm و $S=32$ cm^2　　　۵۵۲ ● (a) 45 cm^2، (b) 36.125 cm^2.

۵۵۳ ● (a)، (b) $AC=BC$　　　۵۵۴ ● (a)، (b) زاویه مرکزی قطاع برابر 2 است.

۵۵۵ ● $\frac{p}{\pi+4}$　　　۵۵۶ ● $\frac{\sqrt{h^2+8R^2}-3h}{4}$　　　۵۵۷ ● $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$

۵۵۸ ● روش اول. فرض کنید که درمثلث ABC، $AC=b$ و $\angle B=\beta$ باشد. با درنظر گرفتن عبارت $\angle BAC=x$ اضلاع AB و BC را برحسب b، x و β بیان کرده و با دوبرابر کردن میانه مثلث، متوازی الاضلاعی رسم می‌کنیم.

روش دوم (روش هندسی). بر مثلث ABC دایره ای محیط کرده و ثابت کنید میانه BM از مثلث دلخواه از میانه B_1M مربوط به مثلث متساوی الساقین AB_1C کوتاهتر است.

۵۵۹ • فرض کنید که AP و CK بر l عمود باشند. عبارت $\angle PBA = x$ را در نظر بگیرید. بعد از تکمیل محاسبات ثابت کنید $PB = BK$ است.

۵۶۰ • (a) $\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$ ، (b) $3\sqrt{3}\,r^2$. نصف زاویه مجاور به قاعده در مثلث را با x نشان دهید.

۵۶۱ • $\frac{75}{4}$ cm² . فرض کنید $PKME$ ذوزنقه محاطی، نقطه E روی BC ، و نقطه M روی CD واقع باشد. مثلث های PAK و ECM متشابه هستند. با در نظر گرفتن این حقیقت، عبارت $CM = 2x$ و $CE = 3x$ را منظور کنید.

۵۶۲ • $100°$. به مثال ٤ بخش ۷ رجوع کنید.

فصل دوم

۵۶۳ • (a) میانگاه یال های چهاروجهی را با S_1، S_2 ، ..... S_6 (شکل ۲۲۲) و نقطه تلاقی میانه های وجوه را با M_1،M_2،M_3 و M_4 نشان می‌دهیم. پاره‌خط های DM_1 و AM_2 واقع در صفحه ADS_1 متقاطع هستند. نقطه تلاقی آنها را با O نشان می‌دهیم.

بدلیل $[DA] \parallel [M_1M_2]$ و $|M_1M_2|/|DA| = 1/3$ از تشابه مثلث های M_1OM_2 و DOA نتیجه می‌شود که $|DO|/|OM_1| = |AO|/|OM_2| = |DA|/|M_1M_2| = 3/1$ است.

بطریق مشابه (با ملاحظه مثلث های BS_5D و CS_3D) می‌توان ثابت کرد که پاره‌خط های BM_3 و CM_4 نیز پاره‌خط DM_1 را از طرف رأس یعنی از طرف همان نقطه O به نسبت $3/1$ تقسیم می‌کنند. پاره‌خط های BM_3 و CM_4 با همان نقطه به همان نسبت تقسیم می‌شوند.

b) ثابت می‌کنیم که O میانگاه پاره‌خط S_1S_2 است. مثلث ADS_1 را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم (اشکال ۲۲۲ و ۲۲۳). نماد $O' = [DM_1] \cap [S_1S_2]$ را در نظر گرفته و $O = O'$ را ثابت می‌کنیم. پاره‌خط S_1S_2 میانه مثلث DS_1A است.

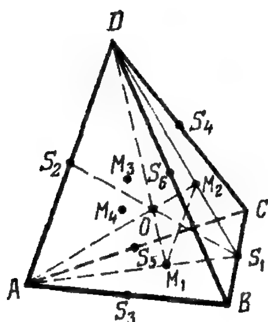
بدلیل $[AD] \parallel [M_1M_2]$ پاره‌خط S_1S_2 پاره‌خط M_1M_2 را در میانگاه آن قطع می‌کند (شکل ۲۲۳). با منظور کردن $|KM_1|/|S_2D| = |M_1M_2|/|DA| = 1/3$ از تشابه مثلث های KM_1O' و S_2DO' به

$$|KO'|/|S_2O'| = |M_1O'|/|DO'| = 1/3$$

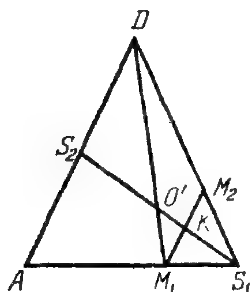
وصول می‌یابیم. همچنین $|KS_2| = \frac{3}{4}|O'S_2|$ را بدست می‌آوریم.

بدلیل $|S_1S_2| = \frac{2}{3}|KS_2|$ به $|O'S_2| = \frac{1}{2}|S_1S_2|$ می‌رسیم. بدین ترتیب نقطه O $(O = O')$ میانگاه

پاره‌خط S_1S_2 خواهد بود. با ملاحظه مثلث های CS_3D و BS_5D می‌توان بطریق مشابه ثابت کرد که نقطه O میانگاه پاره‌خط های S_3S_4 و S_5S_6 است.



شکل ۲۲۲



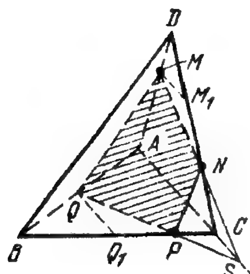
شکل ۲۲۳

۵٦٤ ● رسم برش در شکل ۲۲٤ نشان داده شده است.

$(1)\ S = (MN) \cap (AC)$ $\qquad (2)\ Q = (SP) \cap [AB]$

با اختصاص $xa = \left|BQ\right|$ خطی بصورت $[QQ_1] \parallel [AC]$ رسم می‌کنیم. آنگاه $|QQ_1| = |BQ_1| = xa$ را داریم. بدلیل $|BP| = \frac{4}{5}a$ به $|Q_1P| = \left(\frac{4}{5} - x\right)a$ وصول می‌یابیم.

از تشابه مثلث های SPC و QPQ_1 نتیجه می‌شود که $|SC|/|QQ_1| = |CP|/|Q_1P|$ است. از اینجا نیز $|SC| = \frac{x}{4-5x}a$ را داریم. خطی بصورت $[MM_1] \parallel [AC]$ رسم می‌کنیم. با استدلال بطریق مشابه به $|SC| = a/3$ می‌رسیم. این امر به معنی $x/(4-5x) = 1/3$ است که از آن نیز $x = 1/2$، $BQ = a/2$ بدست می‌آید و جواب مسئله عبارت از $a/2$ خواهد بود.



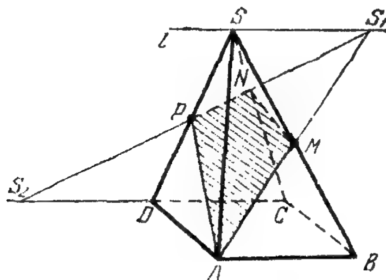
شکل ۲۲٤

۵٦۵ ● نقطه تلاقی خط AM و صفحه SCD را رسم می‌کنیم. بدلیل $(CD) \parallel (AB)$ به $(SCD) \parallel (AB)$ دست می‌یابیم. و این امر بدین معنی است که صفحات SAB و SCD در امتداد خط موازی با (AB) همدیگر را قطع می‌کنند (در شکل ۲۲۵، $(AB) \parallel l$ است). چنین حاصل می‌شود:

$S_1 = (AM) \cap l = (AM) \cap (SCD)$ ، $N = (S_1P) \cap [SC]$

برش عبارت از چهار ضلعی $AMNP$ است. رابطه $S_2 = (S_1P) \cap (CD)$ را در نظر بگیرید. M و P

میانگاه پاره‌خط های SB و SD بوده و چنین داریم: $|AB| = |S_1S|$ و $|S_1S| = |S_2D|$.
بدلیل $|AB| = |CD|$ نیز داریم: $|S_2D| = |CD|$ و $|S_2C| = 2\,|CD|$
حال از تشابه مثلث های SNS_1 و CNS_2 به $|SN|/|NC| = |SS_1|/|CS_2| = 1/2$ می‌رسیم.

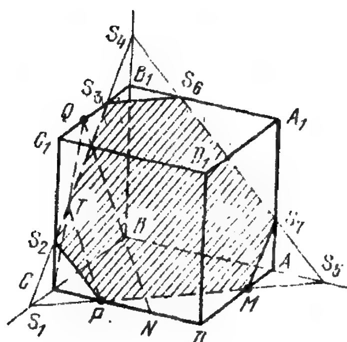


شکل ۲۲۵

۵۶۶ ● صفحه NQP را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این صفحه، وجه BCC_1B_1 را در امتداد پاره‌خط CQ قطع می‌کند. صفحه برش، صفحه NQP را در امتداد خط موازی با NQ قطع می‌کند. خطی در صفحه NQP بصورت $(NQ) \parallel (PT)$ رسم می‌کنیم (شکل ۲۲۶). نقطه $T = (PT) \cap (CQ)$ به صفحه برش متعلق است. توجه دارید که بدلیل $|PN| = |CP|$ چنین داریم: $|TQ| = |CT|$. آنگاه ترسیمات زیر را انجام می‌دهیم:

$S_1 = (MP) \cap (BC) \qquad S_2 = (S_1T) \cap [CC_1] \qquad S_3 = (S_1T) \cap [B_1C_1]$
$S_4 = (S_1T) \cap (BB_1) \qquad S_5 = (MP) \cap (AB) \qquad S_6 = (S_4S_5) \cap [A_1B_1]$

$S_7 = (S_4S_5) \cap [AA_1]$. برش مطروحه عبارت از شش ضلعی $MPS_2S_3S_6S$ است. حال مساحت برش را محاسبه می‌کنیم. به آسانی دریافت می‌شود که $|S_1C| = |S_5A| = a/3$ است. نقطه T میانگاه پاره‌خط CQ بوده و $|QS_3| = |S_1C| = a/3$ و $|S_3B_1| = a/3$ را داریم. مثلث های S_1S_2C و $S_3S_4B_1$ با مثلث $S_3S_2C_1$ متشابه بوده و $|S_2C| = |S_4B_1| = a/3$ استنتاج می‌شود.
بدین ترتیب $|BS_1| = |BS_4| = |BS_5| = 4a/3$ را داریم. از اینرو مثلث $S_1S_4S_5$ متساوی الاضلاع بوده و طول ضلع آن برابر $4\sqrt{2}\,a/3$ و مساحت آن نیز برابر $8\sqrt{3}\,a^2/9$ است. هریک از مثلث های S_1S_2P، $S_4S_6S_3$ و S_5MS_7 با نسبت تشابه 4 با مثلث های $S_1S_4S_5$ متشابه هستند. این امر بدین معنی است که مساحت هریک از آن مثلث ها برابر $\frac{1}{16}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{18}a^2$ است.
وحال می‌توان مساحت برش را بدست آورد: $\frac{8\sqrt{3}}{9}a^2 - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}a^2 = \frac{13\sqrt{3}}{18}a^2$.
یعنی مقدار آن برابر $\frac{13\sqrt{3}}{18}a^2$ است.



شکل ۲۲۶

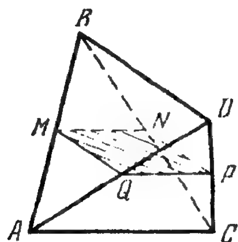
۵۶۷ ● فرض می‌کنیم که $MNPQ$ برشی از چهاروجهی باشد که بوسیله صفحه موازی خطوط AC و BD تشکیل شده باشد (شکل ۲۲۷)، ($[MN] \parallel [QP] \parallel [AC]$ و $[MQ] \parallel [NP] \parallel [BD]$ است). آنگاه $(\widehat{MN}, \widehat{MQ}) = (\widehat{AC}, \widehat{BD}) = \varphi$ را داریم که به معنی $\angle QMN = \varphi$ یا $\angle QMN = \pi - \varphi$ است. در هردو حالت $\sin QMN = \sin \varphi$ را داریم.

با درنظر گرفتن عبارت $x = |AM|/|AB|$ به $|MQ| = x \times |BD| = xb$ وصول می‌یابیم.

بدلیل $|MB| = (1 - x)\,|AB|$ نتیجه می‌شود که $|MN| = (1 - x)\,|AC| = (1 - x)\,a$ است. آنگاه مساحت سطح برش عبارت از $S = |MQ|\,|MN| \sin \varphi = x(1 - x)\,ab \sin \varphi$ خواهد بود که در آن $0 < x < 1$ است.

تابع $x(1 - x)$ (دوجمله ای درجه دوم بصورت $-x^2 + x$) به ازاء $x = 1/2$ دارای بزرگترین مقدار بوده و این مقدار آن برابر $1/4$ است. این امر بدین معنی است که برشی که از میانگاه یال های AB، BC، CD و AD می‌گذرد دارای بیشترین مساحت بوده و مقدار این مساحت برابر $\frac{1}{4}\, ab \sin \alpha$ خواهد بود.

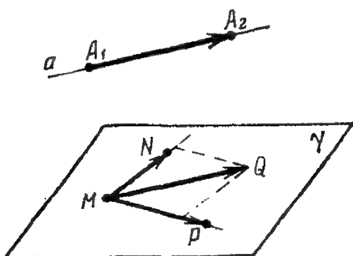
پس جواب مسئله برابر $\frac{1}{4}\, ab \sin \alpha$ می‌باشد.



شکل ۲۲۷

۵۶۸ ● ضرورت. اگر $a \parallel \gamma$ فرض شود آنگاه نیم خط های $[A_1A_2)$، $[MN)$ و $[MP)$ (شکل ۲۲۸) روی خطوط موازی با صفحهٔ γ واقع خواهند بود. این امر به معنی هم صفحه بودن بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MP}$ است. از آنجا که بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MP}$ هم صفحه نیستند (نقاط M، N و P روی یک خط قرار

ندارند) بردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ را می‌توان برحسب این بردارها بیان کرد: $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$
کفایت. فرض می‌کنیم که $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$ است. بردار $\overrightarrow{MQ} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MP}$ را از نقطه M جدا می‌کنیم. اگر $\beta = 0$ باشد آنگاه $\overrightarrow{MQ}=\alpha\overrightarrow{MN}$ بوده و نقطه Q روی بردار MN واقع خواهد شد. بدلیل $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MQ}$ جهات این بردارها بر هم منطبق بوده و این امر بدین معنی است که نیم‌خط های $[A_1A_2)$ و $[MQ)$ که این جهت ها را تعریف می‌کنند روی خطوط موازی قرار دارند، یعنی: $a \parallel (MN)$.
از اینرو نتیجه می‌شود که $a \parallel \gamma$ است.
بطریق مشابه اگر $\alpha=0$ باشد آنگاه $a \parallel (MP)$ یعنی $a \parallel \gamma$ خواهد بود. اگر $\alpha\neq0$ و $\beta\neq0$ باشد آنگاه طبق قانون توازی نقطه Q به صفحه γ متعلق خواهد بود. از اینرو $(MQ)\subset\gamma$ داریم.
از $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MQ}$ درمی‌یابیم که $a \parallel (MQ)$ یعنی $a \parallel \gamma$ است.



شکل ۲۲۸

۵۶۹ ● فرض کنید که $Q \in [AD]$ بوده و عبارت $x = |AQ|/|AD|$ را نیز در نظر بگیرید. (شکل ۲۲۹).
خط های DM و AN موازی صفحه مار بر PQ بوده و بردارهای $\overrightarrow{DM}$، $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ همخط می‌باشند.
و چون بردارهای $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{AN}$ ناهمخط هستند از اینرو بردار $\overrightarrow{PQ}$ را می‌توان برحسب این بردارها بیان کرد؛
یعنی اعدادی مانند α و β وجود دارد بطوریکه:

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha\overrightarrow{DM} + \beta\overrightarrow{AN} \quad (1)$$

حال بردارهای $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{AN}$ را برحسب بردارهای ناهمصفحه $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ بیان می‌کنیم.
چنین داریم:

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad ، \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$$

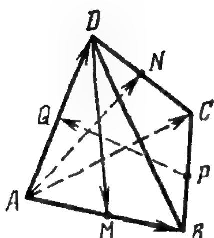
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} =$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AD}$$

با جاگذاری این روابط در (۱) چنین بدست می‌آید:

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AD} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)\overrightarrow{AD}$$

روابط $\alpha = -1$، $\beta = -1$ و $x=1/2$ بدست می‌آید.

از اینرو $|AQ| = |AD|/2$ و $|AQ|/|QD| = 1/1$ حاصل شده و جواب مسئله عبارت از $1/1$ خواهد بود.



شکل ۲۲۹

۵۷۰ ● بردارهای $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ با بردار $\overrightarrow{AC_1}$ همخط بوده (شکل ۲۳۰)

از اینرو $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC_1}$ و $\overrightarrow{AQ} = y\overrightarrow{AC_1}$ را داریم.

بنابراین $\overrightarrow{A_1P} = -\overrightarrow{AA_1} + x\overrightarrow{AC_1}$ و $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC_1}$ استنتاج می‌شود.

بدلیل $(A_1P) \perp (AC_1)$ رابطه $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$ را داریم که از آن نیز $x = \dfrac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|AC_1|^2}$ استنتاج می‌شود.

از آنجا که $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ است روابط $|AC_1|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ و $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = c^2$

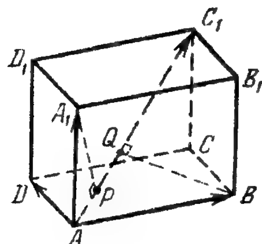
حاصل می‌شود. این امر به معنی $x = c^2/(a^2 + b^2 + c^2)$ است.

بطریق مشابه $y = a^2/(a^2 + b^2 + c^2)$ بدست می‌آید.

از این گذشته $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = (y - x)\overrightarrow{AC_1}$ را داریم که به معنی

$$|PQ| = |y - x| \cdot |AC_1| = |c^2 - a^2| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

است. بنابراین جواب مسئله عبارت از $|c^2 - a^2| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ خواهد بود.



شکل ۲۳۰

۵۷۱ ● بدلیل $(MN) \perp (AB)$ رابطه $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ استنتاج می‌گردد.

بردار $\overrightarrow{MN}$ را برحسب بردارهای ناهمصفحه $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BB_1}$ بیان می‌کنیم (شکل ۲۳۱).

اگر عبارات $x = |MB_1|/|AB_1|$ و $y = |BN|/|BC_1|$ را در نظر بگیریم آنگاه رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BB_1} + y\overrightarrow{BC_1} = x(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BB_1} +$$

$$y(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}) = -x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} + (x + y - 1)\overrightarrow{BB_1}$$

با منظور کردن $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BB_1}| = a$ ، $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2/2$ و $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$ و با

توجه به $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ و $|\overrightarrow{MN}|^2 = a^2/3$ دستگاه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{cases} -xa^2+\frac{y}{2}a^2=0, \\ x^2a^2+y^2a^2+(x+y-1)^2a^2-xya^2=a^2/3 \end{cases}$$

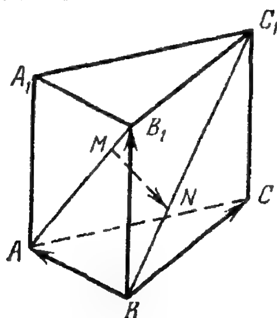
از معادله اول دستگاه $y=2x$ و بنابراین از معادله دوم نیز $36x^2-18x+2=0$ حاصل می‌شود. از این معادله $x_1=1/3$ و $x_2=1/6$ بدست می‌آید. متناظراً $y_1=2/3$ و $y_2=1/3$ حاصل می‌شود.

از اینرو به آسانی دریافت می‌شود که یا $|AM|/|MB_1|=|BN|/|NC_1|=2/1$ یا

$|AM|/|MB_1|=5/1,\ \ |BN|/|NC_1|=1/2$

خواهد بود، بنابراین جواب مسئله عبارت از $|AM|/|MB_1|=|BN|/|NC_1|=2/1$ یا بصورت زیر است

$|AM|/|MB_1|=5/1,\ \ |BN|/|NC_1|=1/2$



شکل ۲۳۱

۵۷۲ ● فرض کنید که: $\gamma\perp\alpha, \gamma\perp\beta,\ \alpha\cap\beta=c,\ \gamma\cap\alpha=a,\ \gamma\cap\beta=b$. مطلوب مسئله اثبات $c\perp\gamma$ است. نقطه M را روی خط c اختیار کرده و از آن عمود c_1 را بر a در صفحهٔ α، وعمود c_2 را بر b در صفحه β رسم می‌کنیم. آنگاه $c_1\perp\gamma$ و $c_2\perp\gamma$ بوده و چون تنها عمود بر γ را می‌توان از نقطه M رسم کرد از اینرو $c_1=c_2$ است.

بدلیل $c_1\subset\alpha$، $c_2\subset\beta$ چنین داریم: $c_1=c_2=\alpha\cap\beta=c$. این امر به معنی $c\perp\gamma$ بوده و این همان چیزی است که می‌باید ثابت می‌کردیم.

۵۷۳ ● ثابت می‌کنیم که (a) موجب (b) می‌شود.

فرض کنید که $|SA_1|=|SA_2|=\ldots=|SA_n|=l$ (شکل ۲۳۲) بوده، SO ارتفاع هرم و $H=|SO|$ است.

چنین داریم: $\sin SA_1O=\sin SA_2O=\ldots=\sin SA_nO=H/l$ که از آن نیز

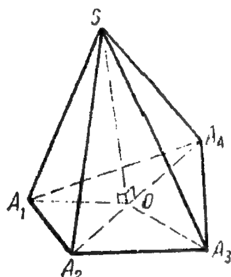
$\angle SA_1O=\angle SA_2O=\ldots=\angle SA_nO$

بدست می‌آید. یعنی یال های جانبی با صفحه قاعده زوایای مساوی درست می‌کنند. حال ثابت می‌کنیم که (b) موجب (c) می‌شود. اگر $\angle SA_1O=\angle SA_2O=\ldots=\angle SA_nO=\varphi$ فرض شود آنگاه $|OA_1|=|OA_2|=\ldots=|OA_n|=H\cot\varphi$ خواهد بود. این امر بدین معنی است که دایره‌ای به

مرکز O وشعاع $R = H \cot \varphi$ بر قاعده هرم محیط می‌شود. سرانجام ثابت می‌کنیم که (c) موجب (a) می‌شود. اگر O را مرکز دایره محیطی قاعده فرض کنیم آنگاه $|OA_1| = |OA_2| = \ldots = |OA_n| = R$ شعاع دایره خواهد بود. بدلیل اینکه SO ارتفاع هرم است، چنین داریم:

$$|SA_1| = |SA_2| = \ldots = |SA_n| = \sqrt{R^2 + H^2}$$

یعنی یال های جانبی دارای طول های مساوی هستند. بدین ترتیب ثابت کردیم که از (a) به (b)، از (b) به (c) و از (c) به (a) می‌توان وصول یافت. از اینرو نتیجه می‌شود که این سه حکم هم ارز هستند.



شکل ۲۳۲

۵۷۴ ● صفحه ای که ازمیانگاه یک پاره‌خط می‌گذرد و بر آن عمود است عبارت از مجموعهٔ همه نقاط هم‌فاصله از دو سر پاره‌خط است. فرض کنید که O مرکز دایره محیطی وجه ABC چهارضلعی (شکل ۲۳۳) و l پاره‌خط مارّ بر نقطه O وعمود بر صفحه ABC باشد. هر نقطه پاره‌خط l از نقاط A ، B و C هم‌فاصله است.

در حقیقت $|OA| = |OB| = |OC|$ را داریم و اگر $S \in l,\ S \neq 0$ باشد آنگاه از مثلث های قائم الزاویه SOA،SOB و SOC درمی یابیم که $|SA| = |SB| = |SC|$ است. فرض کنید که صفحه α از میانگاه یال AD عبور کرده و بر آن عمود باشد. ثابت می‌کنیم که α و l متقاطع هستند. رابطه $l \parallel \alpha$ را درنظر می‌گیریم. از رابطهٔ $l \perp (AB)$ بدلیل $(AD) \perp \alpha$ و $l \parallel \alpha$ نتیجه می‌شود که $l \perp (AD)$ است. همچنین $l \perp (ABD)$ را داریم. بدین ترتیب استنباط شد که دوصفحه متمایز ABC و ABD مار ازنقطه A بر خط l عمود هستند. ولی این امر غیرممکن بود و درنتیجه گزاره $l \parallel \alpha$ نادرست خواهد بود؛ یعنی $l \nparallel \alpha$ خواهد بود.

اگر $S = l \cap \alpha$ فرض شود آنگاه $|SA| = |SD|$ خواهد بود. زیرا $S \in \alpha$ و $S \in l$ و $|SB| = |SC| = |SA|$ است.

این امر بدین معنی است که نقطه S از همهٔ نقاط A ، B ، C و D بیک فاصله بوده و از اینرو به هر صفحه عمود بر یال چهاروجهی در میانگاه آن متعلق خواهد بود.

شکل ۲۳۳

۵۷۵ • درصفحه ASC از M، میانگاه یال SC که درصفحه برش قراردارد عمودی بر آن یال رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این عمود و AC را با K نشان داده و $|KC|$ را پیدا می‌کنیم. از مثلث SOC (شکل b و ۲۳۴a) به $\cos\varphi = |OC|/|CS| = a/\sqrt{2}l$ وصول می‌یابیم.

درنتیجه (a) $\cos\varphi = 1/\sqrt{3}$ و (b) $\cos\varphi = 1/\sqrt{5}$ خواهد بود. حال از مثلث KMC به

(a) $|KC| = |MC|/\cos\varphi = \frac{3}{4}a\sqrt{2} = \frac{3}{4}|AC|$

(b) $|KC| = \frac{5}{4}a\sqrt{2} = \frac{5}{4}|AC|$

می‌رسیم. از نقطه K برش را رسم می‌کنیم. صفحه α برش و خط BD بر یال SC عمود بوده و از اینرو موازی خواهند بود. این امر بدین معنی است که فصل مشترک صفحات α و $ABCD$ نیز با (BD) موازی است. خطی بصورت $(EF) \parallel (BD)$ رسم می‌کنیم. سپس (EM) و (FM) را ترسیم می‌کنیم. درنتیجه برش های مطلوب بدست می‌آید: (a) پنج ضلعی $MNPQR$ و (b) چهارضلعی $MNPQ$.

حال مساحت سطح این برش ها را محاسبه می‌کنیم:

(a) چنین داریم:

$$|MK| = |MC|\cdot\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad |EF| = 2|KC| = \frac{3}{\sqrt{2}}a,$$

$$S_{EFM} = |EF|\cdot|MK| = \frac{3\sqrt{6}}{8}a^2$$

به آسانی دریافت می‌شود که $|CE| = \frac{3}{2}|BC|$ و $|BE| = \frac{1}{3}|CE|$ است.

از اینرو $|EP| = \frac{1}{3}|EF|$ را داریم. خطی بصورت $MM_1 \parallel |SB|$ رسم کرده و آنگاه $|EB| = |BM_1|$ را خواهیم داشت. این رابطه به معنی $|EN| = \frac{1}{2}|EM|$ است.

از $|EP| = \frac{1}{3}|EF|$ و $|EN| = \frac{1}{2}|EM|$ درمی‌یابیم که $S_{EPN} = \frac{1}{6}S_{EFM}$ است.

از تقارن اشکال حول صفحه SAC استنتاج می‌شود که $S_{FQR} = S_{EPN} = \frac{1}{6}S_{EFM}$ است. درنتیجه مساحت سطح برش برابر $S_{EFM} - S_{EPN} - S_{FQR} = \frac{2}{3}S_{EFM} = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2$ خواهد بود.

(b) بطریق مشابه چنین حاصل می‌شود:

در $\triangle PSM$ داریم: $|KM| = \sqrt{\frac{5}{2}}\, a$ ، $|EF| = \frac{5}{\sqrt{2}}\, a$ ، $S_{EFM} = \frac{5\sqrt{5}}{4}\, a^2$.

$\angle PSM = \pi - 2\varphi,\ \tan PSM = -\tan 2\varphi = 4/3,\ |PM| = |MS| \cdot \tan PSM = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\, a$

از اینرو $|PM| = \frac{2}{3}\, |KM|$ حاصل می‌شود. خطی بصورت $[MM_1] \parallel [SB]$ رسم می‌کنیم.

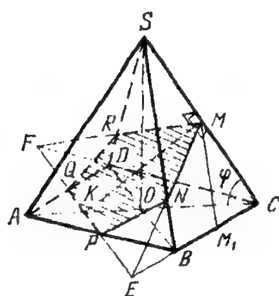
آنگاه داریم: $|EC| = \frac{5}{2}\, |BC|$ ، $|EM_1| = 2\, |BC|$ ، $|BM_1| = \frac{1}{2}\, |BC|$.

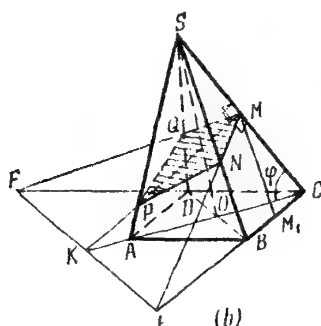
درنتیجه $|MN|/|ME| = |M_1B|/|M_1E| = 1/4$ حاصل می‌شود.

از $|MP| = \frac{2}{3}\, |MK|$ ، $|MN| = \frac{1}{4}\, |ME|$ استنتاج می‌شود که $S_{MNP} = \frac{1}{6}\, S_{MEK}$ یعنی

$S_{MNPQ} = \frac{1}{6}\, S_{MEF} = \frac{5\sqrt{5}}{24}\, a^2$

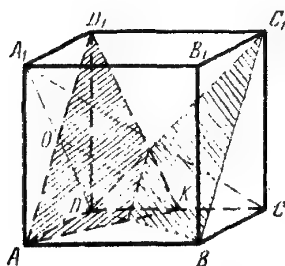
است. پس جواب مسئله عبارت از (a) $\frac{\sqrt{6}}{4}\, a^2$ ، (b) $\frac{5\sqrt{5}}{24}\, a^2$ خواهد بود.





شکل ۲۳۴

۵۷۶ ● قطر A_1C مکعب بر صفحه BDC_1 عمود است (شکل ۲۳۵). بنابراین صفحه برش موازی خط A_1C خواهد بود. براساس این حقیت برش را به صورت زیر رسم می‌کنیم: در صفحه A_1DCB_1 از محل تلاقی آن با قطر AD_1 یعنی نقطه O خط مستقیمی به موازات A_1C رسم می‌کنیم تا یال CD را در نقطه K قطع کند. درنتیجه برش بصورت مثلث AD_1K حاصل می‌شود.



شکل ۲۳۵

بدلیل $|DO| = |OA_1|$ به $|KC| \quad |DK|$ وصول می‌یابیم.

طول یال مکعب را با a نشان می‌دهیم. حجم هرم D_1ADK برابر $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DK| \times |DD_1| = \frac{1}{12}\, a^3$ است. از اینرو نتیجه می‌شود که نسبت قسمت های حاصله از مکعب در اثر تقسیم برش عبارت از $1/11$ است.

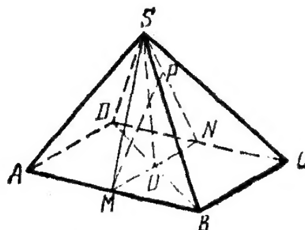
پس جواب مسئله عبارت از $1/11$ خواهد بود.

۵۷۷ • عبارت $a = |SB|$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۳۶). آنگاه h طول عمود مرسوم از نقطه B بر صفحه SCD یعنی فاصله آن نقطه را از صفحه SCD بدست می‌آوریم. بدلیل $(AB) \parallel (SCD)$ فاصله M، میانگاه یال AB از صفحه SCD نیز برابر h است. فرض کنیم که N میانگاه یال CD باشد. آنگاه $(SMN) \perp (SCD)$ بوده و اگر $[MP] \perp (SN)$ باشد آنگاه $[MP] \perp (SCD)$ خواهد بود. از اینرو $|MP| = h$ را داریم. حال $|MP|$ را به عنوان ارتفاع مثلث SMN بدست می‌آوریم. بدلیل $SBO = \pi/4$ رابطه $|SO| = |OB| = a/\sqrt{2}$ را داریم. این امر بدین معنی است که:

$$|MO| = a/2 \text{ ، } |MN| = a \text{ ، } |SN| = \sqrt{|SO|^2 + |ON|^2} = a\sqrt{3}/2$$

حال می‌توان $h = |MP| = |SO| \cdot |MN|/|SN| = \sqrt{2/3}a$ را بدست آورد.

از اینرو نتیجه می‌شود اگر α زاویه بین (SB) و (SCD) باشد آنگاه $\alpha = h/a = \sqrt{2/3}$ خواهد بود. پس جواب مسئله بصورت $\arcsin \sqrt{2/3}$ درمی‌آید.



شکل ۲۳۶

۵۷۸ • اگر $M_0 \in \alpha$ باشد آنگاه $\rho = 0$ و $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ بوده و این به معنی درستی فرمول در حالت اخیر است. فرض کنید که $M_0 \notin \alpha$ بوده و $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ پای عمود مرسوم از M_0 بر α باشد. عبارات $r_1 = \overrightarrow{OM_1} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ، $r_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0;\ y_0;\ z_0)$ را در نظر می‌گیریم که در آن O مبدأ است. معادله $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ را می‌توان به شکل $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_1 + d = 0$ باز نوشت که در آن $\mathbf{n} = (a;\ b;\ c)$ بردار عمود بر صفحه است.

بردارهای $\overrightarrow{M_0M_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ و $\mathbf{n}$ همخط بوده و بنابراین $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{n}$ را داریم.

از اینرو $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{n}$ حاصل می‌شود. آنگاه $(\mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + d = 0$ بوده و درنتیجه $\lambda = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + d}{|\mathbf{n}|^2}$ بدست می‌آید. حال داریم:

$$\rho = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{n}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۵۷۹ • اگر M مرکز قاعده ABC باشد (شکل ۲۳۷) آنگاه

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (4;\ -1;\ 0)$$

خواهد بود. نقطه S دارای مختصات $(z$ و y و $0)$ S بوده و از اینرو

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = (-4;\ y + 1;\ z)$$

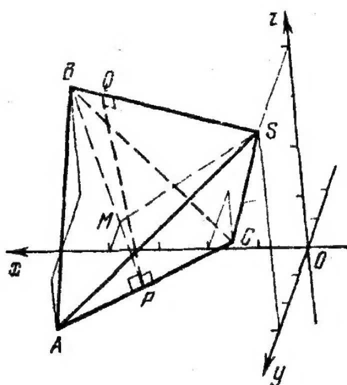
را داریم. چنین بدست می‌آید: $\overrightarrow{AB} = (0;\ -3;\ 3)$ و $\overrightarrow{AC} = (-3;\ -3;\ 0)$
بدلیل $(MS) \perp (ABC)$ روابط $\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ و $\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ را داریم.
از این تساوی معادلات $-3(y+1) + 3z = 0$ و $3(y+1) - 12 = 0$ بدست می‌آید که جوابهای آنها عبارت از $y = 3$ و $z = 4$ است. فرض کنید که P میانگاه یال AC و PQ عمود بر (SB) در صفحه SBP باشد. بدلیل $(AC) \perp (SBP)$، $(AC) \perp (PQ)$ را داریم که به معنی این است که PQ عمود مشترک پاره‌خط های AC و SB بوده، و $|PQ|$ فاصله بین این خطوط است. چنین داریم:

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = (7/2;\ -1/2;\ -1)$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (-3/2;\ 3/2;\ -3)$,

$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = (-5;\ 5;\ 2)$ ، $\overrightarrow{MS} = (-4;\ 4;\ 4)$ ، $|BP| = \sqrt{27/2}$,

از اینرو چنین استنتاج می‌شود:

$|BS| = \sqrt{54}$, $|MS| = \sqrt{48}$ ، $|PQ| = |BP|\cdot|MS|/|BS| = 2\sqrt{3}$



شکل ۲۳۷

۵۸۰ ● فرض کنید l یال فرجه نشان داده شده در شکل ۲۳۸ باشد. صفحاتی بصورت $(APM) \perp l$ و $(BQN) \perp l$ رسم کرده و آنگاه چنین داریم: $\angle APM = \angle BQN = \pi/3$. همچنین عمودهای AA_1 و BB_1 را بر وجوه γ_1 و γ_2 فرجه وارد می‌کنیم. اندازه فرجه حاده بوده و نقاط A_1 و B_1 روی اضلاع PM و QN از زوایای مسطحه قرار دارند. طبق فرض $\angle BAB_1 = \pi/6$، $\angle ABA_1 = \arcsin 0.7$ را داریم. اگر $(AC) \parallel l$ باشد آنگاه $(AC) \perp (BQN)$ بوده و از اینرو $\angle BCA = \pi/2$ خواهد بود، زاویه BAC حاده بوده و برابر زاویه بین (AB) و l است. عبارت $AB = a$ را در نظر می‌گیریم. درمی‌یابیم که:

$|BB_1| = a\cdot\sin BAB_1 = a/2$, $|QB_1| = |BB_1| \times \cot |BQB_1| = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

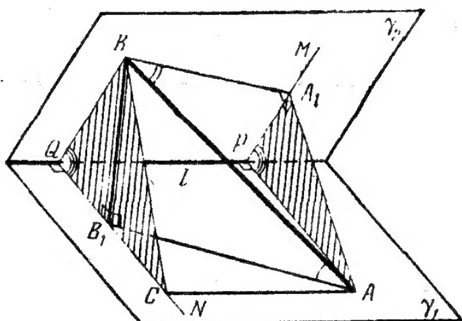
$|AA_1| = a\cdot\sin ABA_1 = 0.7a$ ، $|PA| = |AA_1|/\sin APA_1 = 7a/5\sqrt{3}$

بدلیل $|QC| = |PA|$ داریم: $|B_1C| = |PA| - |QB_1| = 9a/10\sqrt{3}$. درمثلث AB_1C داریم:

$|AB_1| = a\cdot\cos(\pi/6) = a\sqrt{3}/2$, $|AC| = \sqrt{|AB_1|^2 - |B_1C|^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}a$

درنتیجه $\cos BAC = |AC|/|AB| = 2\sqrt{3/5}$ خواهد بود.

پس جواب مسئله عبارت از $\arccos(2\sqrt{3/5})$ خواهد بود.



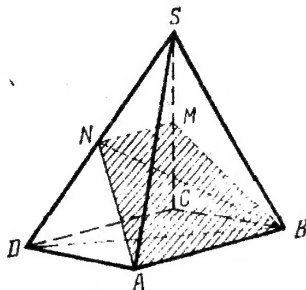
شکل ۲۳۸

۵۸۱ ● برش $ABMN$ را رسم می‌کنیم (در شکل ۲۳۹، $[MN] \parallel [AB] \parallel [CD]$ را داریم).

حجم هرم $SABCD$ را با V و حجم هرم $SABMN$ را با V_1 نشان می‌دهیم. حجم V_1 برابر مجموع V_2 و V_3 مربوط به هرم های $SBMN$ و $SBAN$ است. حجم هرم‌های $SBMN$ و $SBCD$ را مقایسه می‌کنیم. وجوه SMN و SCD را به عنوان قاعده این هرم ها و نقطه B را به عنوان رأس مشترک در نظر می‌گیریم. بدلیل $|SM| = \frac{1}{2}|SC|$، $S_{SMN} = \frac{1}{4}S_{SCD}$ را داریم که به معنی $V_2 = \frac{1}{4}V_{SBCD}$ است.
بدیهی است که $V_{SBCD} = \frac{1}{2}V$ بوده و درنتیجه $V_2 = \frac{1}{8}V$ را خواهیم داشت.

هرم های $SBAN$ و $SBAD$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. وجوه SAN و SAD را به عنوان قاعدهٔ آنها و نقطه B را به عنوان رأس مشترک در نظر می‌گیریم. بدلیل اینکه N میانگاه یال SD است از اینرو $S_{SAN} = \frac{1}{2}S_{SAD}$ را داریم که به معنی $V_3 = \frac{1}{2}V_{SBAD} = \frac{1}{4}V$ است.

حال می‌توانیم حجم $V_1 = V_2 + V_3 = \frac{3}{8}V$ را بدست آوریم، حجم قطعه جدا شده از هرم $\frac{5}{8}V$ بوده و نسبت حجم ها نیز برابر 3/5 است.



شکل ۲۳۹

۵۸۲ ● بدیهی است که چهاروجهی و متوازی السطوح در رأس D مشترک هستند (شکل ۲۴۰).
یال های متوازی السطوح که از این رأس منشعب می‌شوند روی یال های چهار وجهی قرار دارند. وجه

ABC چهار وجهی فقط می‌تواند محتوی رأسی از متوازی السطوح باشد که روی وجه دارای رأس D قرار ندارند. برای این شرط مسئله فقط یک رأس متوازی السطوح یعنی رأس F_1 وجود دارد. برش هایی از چهار وجهی را که بوسیله صفحات $D_1E_1F_1G_1$ و DD_1F_1F ایجاد شده اند مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.
عبارات $|MF_1|/|MN| = x$, $|CF_1|/|CK| = y$ را در نظر می‌گیریم.
ارتفاع چهار وجهی مرسوم از رأس C را با H و ارتفاع متوازی السطوح که بر قاعده $DEFG$ وارد شده است را با h نشان می‌دهیم. ارتفاع چهار وجهی CD_1MN مرسوم از رأس C برابر $H - h$ است.
این چهار وجهی با مرکز C و نسبت y متجانس چهار وجهی $CDAB$ است. بنابراین داریم:

$$S_{D_1MN} = y^2 \cdot S_{DAB}, \quad H - h = yH$$

یعنی: $h = (1 - y)H$. مثلث های ME_1F_1 و MD_1N با نسبت x متشابه بوده و از اینرو

$$S_{ME_1F_1} = x^2 \cdot S_{MD_1N}$$

را داریم. مثلث های NG_1F_1 و ND_1M با نسبت $1 - x$ متشابه بوده و از اینرو

$$S_{NG_1F_1} = (1 - x)^2 S_{ND_1M}$$

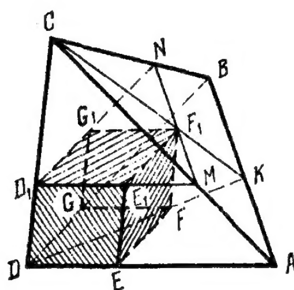
است. بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$S_{D_1E_1F_1G_1} = S_{D_1MN} - S_{ME_1F_1} - S_{NG_1F_1} = 2x(1 - x)\ S_{D_1MN} = 2x(1 - x) \times y^2 S_{DAB}$$

حجم متوازی السطوح بصورت زیر درمی‌آید:

$$V_p = S_{D_1E_1F_1G_1} \cdot h = 2x(1 - x)\ y^2(1 - y)\ S_{DAB} \cdot H$$

بدلیل $S_{DAB} \times H = 3V$ ، $V_p = 6x(1 - x)\ y^2(1 - y)\ V$ را داریم که در آن $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ است. تابع $x(1 - x)$ به ازاء $x = 1/2$ دارای بزرگترین مقدار است و مقدار آن برابر $1/4$ می‌باشد. به آسانی دریافت می‌شود که تابع $y^2(1 - y)$ بزرگترین مقدار خود در بازهٔ (0 و 1) را به ازاء $y = 2/3$ اختیار کرده و این مقدار برابر $4/27$ است. این امر بدین معنی است که به ازاء $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ داریم: $x(1 - x)\ y^2(1 - y) \leqslant (1/4) \cdot (4/27) = 1/27$.



شکل ۲۴۰

علامت تساوی وقتی اعمال می‌شود که $x = 1/2$ و $y = 2/3$ باشد.

بدین ترتیب بزرگترین مقدار برای حجم متوازی السطوح برابر $6 \cdot \frac{1}{27} V = \frac{2}{9} V$ خواهد بود. متوازی السطوحی که رأس F_1 آن بر نقطه تلاقی میانه های وجه ABC منطبق است دارای بیشترین حجم ممکنه بوده و در نتیجه جواب مسئله عبارت از $\frac{2}{9} V$ خواهد بود.